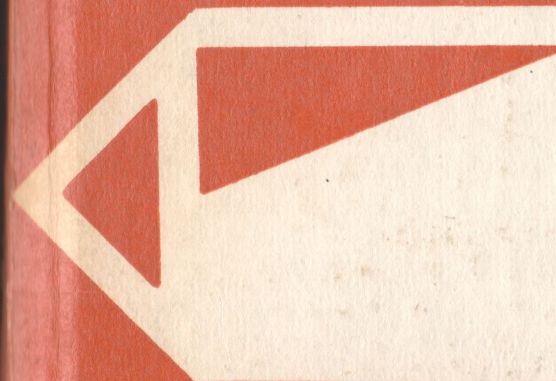
Corneliu Rusescu
Cosma Tudose

MODELE și MODELARE în FIZICĂ





EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ

CORNELIU RUSESCU • COSMA TUDOSE

MODELE
ŞI MODELARE
ÎN FIZICĂ



EDITURA ŞTIINŢIFICĂ ŞI ENCICLOPEDICĂ

BUCUREŞTI, 1987

Coperta de ADRIAN MOLDOVAN

CUPRINS

PREFAȚĂ

„Ceea ce e bun este de două ori mai bun dacă este scurt".

SCHOPENHAUER

Întotdeauna, în domeniul fizicii, în virtutea permanentei tendințe de concretizare, atît cercetătorul, pentru a circumscrie sfera investigațiilor sale, cît și pedagogul, pentru a-și fixa ideile, au recurs, în mod intuitiv, la noțiunea de model chiar atunci cînd ea nu era perfect clarificată.

Folosirea modelelor a devenit însă o necesitate imperioasă pe măsură ce fizica a început să abordeze studiul sistemelor complexe, a sistemelor ce depind din ce în ce de mai mulți parametri. Totuși, deși în stadiul actual al dezvoltării fizicii și tehnicii, se vorbește mult despre modele și modelare, aceste noțiuni, precum și acele conexe lor, sînt foarte rar precizate în lucrările de specialitate și cu atît mai puțin concretizate prin exemple caracteristice. În această mică lucrare, fără a pretinde că am găsit calea cea mai bună, în special datorită posibilităților practic nelimitate de modelare, am urmărit să clarificăm în acest domeniu noțiunile de bază și să le fixăm prin exemple cît mai sugestive.

Lucrarea de față are un pronunțat caracter pedagogic și ca atare se adresează unor categorii largi de cititori, dar mai ales cadrelor didactice ce predau fizica sau materii de specialitate tehnică în învățămîntul general sau liceal de specialitate. Ea este utilă și studenților facultăților de fizică sau tehnice, care încep să facă primii pași în domeniul cercetării științifice și în bună măsură elevilor din ultimele clase de liceu, care manifestă o vădită înclinare spre studiul fizicii. În general lucrarea poate interesa orice profesionist, ale cărui preocupări au legătură cu studiul acestei discipline.

Sîntem convinși că mulți dintre profesorii cu experiență și talentați din învățămîntul liceal, particularizînd multe dintre problemele expuse, prin simulare, le vor putea face accesibile elevilor, adîncind și lărgind astfel cercul de cunoștințe prevăzute în programele școlare. De altfel scopul pe care l-am urmărit nu a fost numai de a expune o cantitate limitată de cunoștințe, mai mult sau mai puțin cunoscute, ci mai ales de a pune la îndemînă cititorului și de a-i atrage atenția asupra unor metode utile, atît în practica pedagogică cît și în aceea de cercetare științifică.

AUTORII

Capitolul 1. **MODELAREA ÎN FIZICĂ**

> „Sistematizarea și simplificarea sînt în esență primii pași spre asimilarea de cunoștințe. Adevăratul nostru dușman este necunoscutul".
>
> *THOMAS MANN*

1.1. Noțiunea de model

Evoluția științei și tehnicii implică pătrunderea din ce în ce mai adînc în esența fenomenelor naturii. Aceste fenomene se prezintă simțurilor noastre sub forme extrem de variate, rezultînd la rîndul lor din interacțiunea unui număr mare de factori. O parte dintre acești factori au un rol deosebit în fenomenele pe care le avem sub observație, în timp ce alții sînt auxiliari și lipsiți de importanță. Aceștia din urmă umbresc fenomenele în cauză — de aceea trebuie, dacă nu eliminați definitiv, cel puțin neglijați într-o primă aproximație. Pentru eliminarea informațiilor secundare și punerea în valoare a elementelor fundamentale și esențiale sînt însă necesare cunoștințe profunde, atît teoretice cît și practice. Modelarea este una dintre metodele importante folosite astăzi în știință și tehnică, pentru obținerea unor astfel de rezultate.

Știința operează astăzi din ce în ce mai puțin cu entități considerate simple, omogene unele față de altele. În gîndirea modernă, dialectică, se impune din ce în ce mai mult categoria de sistem, caracterizat prin tipuri specifice de structuri, adică prin anumite forme de interacțiuni între elementele ce îl alcătuiesc. Sistemul este definit ca un ansamblu de elemente în interdependență, constituind un întreg organizat.

După natura structurilor și interacțiunilor specifice, sistemele se împart în: sisteme fizice, sisteme chimice, sisteme biologice, sisteme sociale etc.

La rîndul lor, sistemele fizice se pot clasifica în: sisteme macroscopice (sau termodinamice) și sisteme microscopice.

Un sistem macroscopic, de exemplu, este determinat simultan de parametrii lui mecanici, termici, electromagnetici (deci și optici) etc.

În studiile științifice și practice un rol important revine simulării sistemelor și situațiilor reale. Prin *simulare* înțelegem stabilirea unei relații de corespondență între două sisteme, fiecare dintre ele putînd corespunde unei realități obiective sau unei abstracțiuni. Unul dintre sisteme se pretează mai bine studiului decît celălalt, fapt ce ne permite să ne facem o idee despre proprietățile celui de al doilea sistem, observînd modul de comportare al primului. În acest caz sistemul ales pentru studiu poartă numele de model.

Se spune despre un sistem S_M că este *model* al sistemului S_O dacă se poate stabili o corespondență bine definită între S_M și S_O. Spre deosebire de sistemul S_O — numit *sistem original* — modelul S_M este înzestrat numai cu proprietăți esențiale și de aceea este mai sărac decît originalul. Fixarea proprietăților cît și a conexiunilor se stabilește printr-un sistem de axiome, pe baza căruia se dezvoltă teoria modelului.

Deci, vom putea defini *modelul* ca *un sistem material sau abstract, care, fiind pus în corespondență cu un alt sistem dat anterior, va putea servi indirect studiului proprietăților acestui sistem mai complex (original) și cu care modelul prezintă o anumită analogie.*

Nevoia de a modela realitatea este determinată de imposibilitatea de a aborda sub forma care ni se prezintă, dată fiind complexitatea ei inepuizabilă.

Un model se numește *izomorf* (de aceeași formă) dacă sistemul real (original) și modelul coincid într-o manieră completă, element cu element. De exemplu, modul în care negativul corespunde cu fotografia sa, cum corespunde un desen cu piesa executată după el, cum macheta corespunde originalului, cum soluțiile unei ecuații pot descrie procesele ce se produc într-un sistem etc.

Adeseori modelele izomorfe se dovedesc a fi extrem de complicate și, practic, imposibil de aplicat și realizat. De aceea prezintă mai mult interes crearea unor modele care să permită definirea numai a aspectelor esențiale a sistemelor reale, fără a se intra în detalii: de exemplu, cazul unei hărți geografice față de terenul ce-l reprezintă.

Modelele ale căror diferite elemente nu corespund decît în parte, mai mult sau mai puțin sistemului real, fără ca

să existe o corespondență perfectă de la element la element, se numesc modele omomorfe.

Izomorfismul și omomorfismul sînt susceptibile de o definire matematică riguroasă în cadrul teoriei algebrice a grupurilor.

Fie X și Y grupurile. Dacă elementele acestor grupuri sînt legate printr-o corespondență biunivocă, astfel încît, pentru orice element a, $b \in X$ și elementele ce le corespund a', $b' \in Y$, elementului $c = ab$ îi va corespunde elementul $c' = a'b'$, se va spune că grupurile sînt izomorfe.

Grupurile izomorfe nu pot diferi decît prin natura elementelor lor și, poate, prin natura operațiilor definite pentru aceste grupuri.

În grupurile omomorfe, corespondența dintre grupuri este unilaterală. Se spune că aplicația grupului X în grupul Y este omomorfă, dacă fiecărui element din grupul X îi corespunde univoc un element determinat din grupul Y, în așa fel încît elementelor a, $b \in X$ le corespund elementele a', $b' \in Y$, iar elementului $ab = c$ îi corespunde elementul $c' = a'b'$. În cazul general al omomorfismului de forma $X \to Y$, diferite elemente din grupul X vor putea trece în cîte un element dat din grupul Y, existînd însă și posibilitatea ca unele elemente din grupul X să nu treacă în grupul Y.

Rezultă că în procesul modelării există un sistem S_O ale cărui proprietăți urmează să fie modelate, pe care îl numim obiect modelat, sau original și un alt sistem S_M care constituie un model al originalului. Între original și model sînt corespondențe obiective, ce ne oferă posibilitatea să înlocuim în anumite privințe originalul cu modelul și să stabilim reguli de trecere de la informațiile obținute pe model la informațiile obținute pe original. În desfășurarea procesului modelării apar trei faze distincte:

1) trecerea de la original la model;
2) cercetarea pe model;
3) transferul pe original a rezultatelor obținute pe model.

Față de cercetarea directă pe original, cercetarea pe model prezintă avantajul că proprietățile sistemului ce constituie modelul sînt mai bine cunoscute și mai ușor de studiat. După cum s-a arătat mai sus, modelul poate fi izomorf sau omomorf, condiția de izomorfism nefiind necesară în modelare. Modelarea izomorfă este mai săracă

în proprietăți decît cea omomorfă. În general modelele folosite în știință nu sînt izomorfe cu originalul.

Trebuie menționat că cercetările pe model, din cauza neidentității modelului cu originalul, au o sferă mai restrînsă de valabilitate, originalul fiind mai complex decît modelul. Această lipsă va fi compensată, într-o cercetare ulterioară, de un alt model mai complex, mai perfecționat, care acoperă o parte mai mare din mulțimea de proprietăți a fenomenului dat, construit pe baza concluziilor la care s-a ajuns din confruntarea modelului anterior cu realitatea. La rîndul său și acesta va ceda locul altuia care va aproxima și mai bine realitatea ș.a.m.d. Rezultatul va fi apariția unui lanț de modele care se înlocuiesc succesiv unele pe celelalte, lanț în cadrul căruia se păstrează și se amplifică informația.

În esență limitarea posibilităților modelării se datorează următorilor factori :

1. Neglijării tuturor fenomenelor considerate într-o primă aproximație ca secundare, dar care, în urma modificării la scară a dimensiunilor (ca în cazul modelelor la scară redusă) sau în alte condiții de lucru (modelarea unui fenomen pe altul etc.) pot deveni la fel de importante ca și fenomenul principal.

2. Apariția unor noi fenomene, care din punctul de vedere al modelării prezintă un caracter parazit. Apariția acestor fenomene poate fi determinată : a) de modificarea scării ; b) de modificarea condițiilor de producere a fenomenului în instalație sau model față de situația reală ; c) de neglijarea structurii microscopice (moleculare sau atomice) a corpurilor care iau parte la formarea modelului, sau a căror evoluție este studiată.

3. Neglijarea completă a structurii sau a naturii corpurilor care iau parte la desfășurarea fenomenului studiat, ca, de exemplu, în cazul modelării pe calculatoare.

1.2. Folosirea modelării în studierea fizicii

Teoria modelării constituie astăzi un procedeu cu multiple posibilități de aplicare în cele mai variate domenii ale științei și tehnicii. Datorită trăsăturilor lor generale, noțiunile de model și de modelare s-au dovedit extrem de fertile, încît putem spune că modelarea constituie un mijloc de investigație deosebit de util și fecund, aplicabil

oricărei discipline, dar mai ales în fizică. În cele ce urmează ne vom ocupa de modelarea sistemelor fizice, avînd ca obiectiv principal studiul fizicii.

În acest scop vom căuta să facem o clasificare a modelelor din punct de vedere metodic. Practica arată că modelele se construiesc prin similitudine, prin analogie sau prin idealizare.

Modelarea prin similitudine constă în extinderea asemănării geometrice asupra unor mărimi fizice din domeniul mecanicii, al transmisiei de căldură, al electromagnetismului etc. Modelul folosit este de obicei o machetă ce reproduce originalul, la dimensiuni reduse și ale cărei proprietăți se studiază în laborator cu scopul de a fi apoi extinse asupra originalului. Macheta reproduce aproape în toate amănuntele originalul, de aceea modelarea prin similitudine se apropie cel mai mult de modelarea izomorfă. Este folosită în construcția de avioane, de nave, în termotehnică, în electrotehnică etc. și în procesul de instruire, pentru a reprezenta intuitiv obiectul original inaccesibil, din cauza marilor lui dimensiuni.

Modelul analogic este un sistem abstract sau concret care se deosebește ca formă geometrică de original, dar care are aceleași proprietăți cu ale lui, se îndepărtează de modelul izomorf, fiind mai apropiat de modelul omomorf.

Modelul ideal are un loc intermediar între teorie și experiment. Modelele de acest tip pot fi construite din diferite imagini grafice, formule matematice, ce sugerează sau prezintă o anumită asemănare cu originalul, cum ar fi schemele unor mașini, schemele unor circuite electrice etc., sau modele matematice, ele formînd un sistem de obiecte abstracte, utilizate cu precădere în teorie. Evoluția lor poate fi descrisă matematic tocmai datorită acestei idealizări. Modelele ideale sînt în general omomorfe.

Bineînțeles că această clasificare nu este riguroasă, fiecare dintre tipurile de modele arătate pot incude elemente din celelalte două feluri de modele. Studiul fizicii dovedește că folosirea modelării ca metodă de predare a cunoștințelor, cît și ca metodă a structurii acestora în programe și manuale, dă rezultate foarte bune. Folosită cu abilitate, ea poate servi pentru a face legătura între diferitele capitole ale fizicii, care, la prima vedere, par că se deosebesc substanțial, ea poate servi la generalizarea, abstractizarea și la sistematizarea unor vaste domenii ale fizicii.

Face posibilă însuşirea şi aplicarea în practică a unei mari cantităţi de cunoştinţe într-un timp mai scurt. Avînd în vedere faptul că în momentul de faţă asistăm la încercări de îmbunătăţire a modului de studiere a fizicii în învăţămîntul de cultură generală şi de specialitate, credem că metoda modelării va deveni şi mai utilă în predarea şi studierea fizicii în anii următori.

Capitolul 2. MODELAREA PRIN SIMILITUDINE

„Adevărul nu există numai în lumea ce ne înconjoară sau în modelele noastre, ci şi în procesul de corelaţie a modelelor şi a lumii".

E. A. SINGNER

2.1. Chestiuni generale

În construcţia navală, în construcţia avioanelor, la turbinele hidraulice, la instalaţiile de transmisie a energiei, înainte de trecerea la construcţia sistemului original sînt necesare încercări pe machete care reproduc originalul la dimensiuni mult mai reduse. Asemănarea geometrică nu este însă suficientă pentru reproducerea fenomenelor pe machetă, identic ca în instalaţia în mărime naturală. În afară de aceasta, trebuie realizată similitudinea mecanică-fizică a mărimilor (parametrilor), care joacă un rol preponderent în desfăşurarea fenomenului. Această similitudine trebuie stabilită astfel încît ecuaţiile diferenţiale sau integrale care descriu fenomenul la scara naturală să concorde cu ecuaţiile corespunzătoare pentru model. Metoda modelării prin similitudine se întrebuinţează cu succes pretutindeni unde soluţionarea pe cale analitică a ecuaţiilor diferenţiale ale fizicii, în condiţiile de unicitate impuse, întîmpină dificultăţi pe care mijloacele actuale ale analizei matematice superioare nu le pot învinge, unde însă practica pretinde totuşi soluţii numerice.

Principiul similitudinii dă posibilitatea să se obţină din ecuaţiile care descriu fenomenele în cauză, chiar fără rezolvarea lor, concluzii de importanţă fundamentală. Într-adevăr, un grup de fenomene asemănătoare este caracterizat prin existenţa unor relaţii funcţionale între mărimile caracteristice fenomenelor grupului, relaţii satisfăcute de toate aceste fenomene. În consecinţă, transformările care permit trecerea de la un fenomen al grupului la alt fenomen al acestuia depind de un număr de parametri cărora,

dîndu-li-se un anumit sistem de valori, se poate trece pe rînd prin toate fenomenele grupului.

Întrucît oricare din fenomenele unui grup poate fi descris de ecuațiile funcționale ale clasei de care aparțin fenomenele, rezultă că transformările unui grup de fenomene trebuie să lase invariante ecuațiile clasei de care aparține grupul. De aceea, pentru ca similitudinea să fie efectivă trebuie ca un fenomen să nu depindă, în desfășurarea sa, de sistemul de unități de măsură folosit la stabilirea ecuațiilor care descriu această desfășurare.

Ținînd seama de aceste considerații, fără a recurge la o dezvoltare generală și riguroasă din punct de vedere matematic, vom ilustra în cele ce urmează teoria similitudinii, prin exemple simple, din care se pot întrevedea și dificultățile, cînd metoda trebuie aplicată în probleme complexe.

2.2. Similitudine statică

Vom începe cu un exemplu simplu de rezistența a materialelor. Se știe că orice grindă dreaptă asupra căreia acționează diferite sarcini concentrate sau continue se deformează, încovoindu-se. Se demonstrează în cursurile de specialitate că în această situație și în limita deformărilor elastice, linia care unește centrele de greutate ale tuturor secțiunilor drepte, transversale, ale grinzii defor-

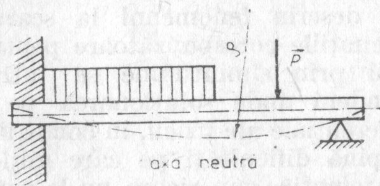


Fig. 2.1.

mate, numită axă neutră (fig. 2.1), este o curbă continuă avînd în orice punct al ei curbura exprimată prin relația

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI},$$

ρ fiind raza de curbură, E — modulul de elasticitate al materialului din care este confecționată grinda, iar M și I sînt respectiv momentul încovoietor și momentul de inerție al secțiunii considerate.

Folosindu-se această relație se pot dimensiona barele ale căror modele au fost încercate în prealabil la flambaj. Sînt solicitate la flambaj barele supuse la compresiune de o forță $\vec{P}$ (fig. 2.2).

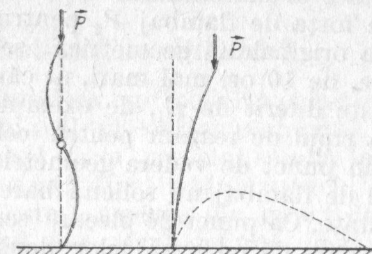


Fig. 2.2.

Vom observa că dacă lungimea barei este mai mare, se produce o încovoiere și bara rezistă la o sarcină mult mai mică decît aceea stabilită pentru compresiune. Se spune că bara flambează și de aceea ea nu mai poate fi calculată, simplu, la compresiune.

Flambajul este datorit mai multor cauze: sarcina $\vec{P}$ nu poate fi niciodată perfect centrică. Vom avea deci momente încovoietoare, care vor produce încovoierea barei.

La rîndul ei, piesa nu poate fi niciodată perfect dreaptă. Sarcina $\vec{P}$ va avea deci față de diferitele secțiuni, excentricități diferite care produc momente încovoietoare.

Materialul nu poate fi perfect omogen. Rezistențele nemaifiind uniform repartizate, vor da deci un moment încovoietor. În toate aceste cazuri, momentul încovoietor ia naștere din cauza excentricității forței, tinde să mărească excentricitatea; avem deci un caz de echilibru nestabil. Din această cauză forțele exterioare nu mai găsesc opunerea rezistențelor interioare. Se produc astfel săgeți neadmisibile cu un element de construcție sau se poate chiar ca baza să se rupă. S-au stabilit formule pentru calculul pieselor la flambaj. Totuși se preferă uneori ca înainte de a se trece la confecționarea piesei respective să se facă încercări pe modele, mai ales în cazul cînd secțiunea pieselor este mai complicată și cînd se urmărește să se evite abuzul de coeficienți de siguranță, care ar duce la supradimensionarea elementelor de construcție.

Vom lua următorul exemplu: un corp de revoluţie, de forma unei bare model, se supune unor încercări cu încărcare la flambaj centric. Fie $P_1 = 125$ N forţa pentru care modelul poate rezista la flambaj. Notăm cu E_1 modulul de elasticitate al materialului din care este realizat modelul. Se cere forţa de flambaj P_2 pentru execuţia în formă naturală a originalului geometric, asemenea cu dimensiunile liniare, de 10 ori mai mari, al cărui modul de elasticitate E_2 este diferit de E_1, de exemplu $E_2 = 2\,E_1$. Se presupune că tipul de reazăm pentru cele două bare este asemenea din punct de vedere geometric şi elastic şi că forţele critice de flambaj nu solicită barele dincolo de limita de elasticitate. Ca punct de plecare serveşte ecuaţia arătată mai sus, care dă curbura celor două linii elastice asemenea.

Pentru ecuaţia originalului S_O obţinem

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{M_2}{E_2 I_2} = \frac{P_2 y_2}{E_2 I_2},$$

iar pentru modelul S_M

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{P_1 y_1}{E_1 I_1},$$

în care ρ_1, ρ_2 sînt razele de curbură, $M_1 = P_1 y_1$, $M_2 = P_2 y_2$ sînt momentele încovoietoare, iar I_1, I_2 sînt momentele de inerţie ale secţiunilor barei (despre care se ştie că sînt proporţionale cu puterea a patra a unei lungimi). Împărţind cele două relaţii, rezultă

$$\frac{\dfrac{1}{\rho_2}}{\dfrac{1}{\rho_1}} = \frac{\dfrac{P_2 y_2}{E_2 I_2}}{\dfrac{P_1 y_1}{E_1 y_1}} = \frac{P_2 y_2}{P_1 y_1} \cdot \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}.$$

Prin trecerea de la model la original, potrivit principiului similitudinii, lungimile trebuie să treacă în raportul de asemănare geometrică λ.

Deci

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \lambda \cdot \frac{E_1}{E_2} \frac{1}{\lambda^4}.$$

De aceea, forţa de flambaj P_2 pentru execuţia principală se calculează cu ajutorul legii de transpunere,

$$P_2 = P_1\,\lambda^2\,\frac{E_2}{E_1}, \text{ de unde } P_2 = 125 \cdot 10^2 \cdot 2 = 25\,000 \text{ N}.$$

2.3. Similitudine dinamică

Vom considera un model machetă S_M, care se mişcă într-un fluid real (vîscos), cu o anumită viteză u_1, sau, ceea ce este acelaşi lucru, modelul se află în repaus şi fluidul se mişcă cu aceeaşi viteză faţă de model. Modelul are o formă definită şi este asemenea din punct de vedere geometric cu originalul, la o scară definită, încît este suficient să se cunoască una dintre dimensiunile modelului pentru a putea determina atît celelalte dimensiuni ale modelului cît şi ale originalului. Vom presupune că fluidul este incompresibil (din această categorie fac parte şi gazele în mişcare pînă la viteze apreciabil mai mici decît viteza sunetului) şi că mişcarea sa se face în regim staţionar, în absenţa unor forţe exterioare.

În aceste condiţii, mişcarea generală a unui fluid real (vîscos) este descrisă de ecuaţia lui Navier-Stokes, dată mai jos sub formă vectorială, într-un caz particular, anume în regim staţionar şi irotaţional,

$$(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\;p + \frac{\eta}{\rho}\cdot\Delta\,\vec{v}, \qquad (2.1)$$

care, transpusă în coordonate carteziene, devine

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\,\Delta\,v_x, \qquad (2.1')$$

în care $v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_x}{\partial z}$ este variaţia componentei v_x a vitezei unei particule oarecare de fluid în funcţie de coordonatele ei, $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ este variaţia presiunii în direcţia x, ρ — densitatea fluidului (invariabilă), η — vîscozitatea dinamică (invariabilă), iar

$\eta \cdot \Delta v_x = \eta \left(\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$ este componenta forţei de frecare cu particulele învecinate, în direcţia x.

Cele două cazuri de mişcare, ale originalului S_O şi modelului S_M, fiind asemenea, pentru a se putea trece de la model la original sau invers, ecuaţiile diferenţiale care descriu fenomenele, în cele două cazuri trebuie să fie identice. Pentru aceasta, mărimile de aceeaşi natură care intră în ecuaţiile diferenţiale (2.1′) pentru original şi model trebuie să fie proporţionale (în rapoarte ce pot fi cunoscute).

Ca atare, între lungimi vor exista relaţiile

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{l_2}{l_1} = \lambda, \tag{2.2}$$

l_1, l_2 fiind distanţele dintre două puncte analoge din model şi din original, iar (x_1, y_1, z_1) şi (x_2, y_2, z_2) coordonatele acestor puncte. În mod asemănător, pentru viteze,

$$\frac{v_{x_2}}{v_{x_1}} = \frac{v_{y_2}}{v_{y_1}} = \frac{v_{z_2}}{v_{z_1}} = \frac{u_2}{u_1} = \alpha_v, \tag{2.2′}$$

în care v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1} sînt vitezele fluidului în diferite puncte din apropierea modelului, v_{x_2}, v_{y_2}, v_{z_2} sînt vitezele în punctele analoge faţă de original, u_1 şi u_2 sînt vitezele relative ale modelului, respectiv originalului, faţă de fluid.

În mod asemănător, pentru presiuni, densităţi şi vîscozităţi vom avea

$$\frac{p_2}{p_1} = \alpha_p, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \alpha_\rho \text{ şi, respectiv, } \frac{\eta_2}{\eta_1} = \alpha_\eta. \tag{2.2″}$$

Ţinînd seama de aceste notaţii, mişcarea unei particule de fluid din original, descrisă de ecuaţia,

$$v_{x_2}\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_2} + v_{y_2}\frac{\partial v_{x_2}}{\partial y_2} + v_{z_2}\frac{\partial v_{x_2}}{\partial z_2} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\eta_2}{\rho_2}\cdot\Delta v_{x_2},$$

. . . .

. . . .

va fi asemenea cu aceea a particulei de fluid în mişcarea corespunzătoare din model, dacă va fi satisfăcută relaţia obţinută prin introducerea valorilor lui x_2, y_2, z_2, v_{x_2}, v_{y_2}, v_{z_2}, p_2, ρ_2, η_2 deduse din (2.2, (2.2′), (2. 2″) în relaţia de mai sus şi anume,

$$\frac{\alpha_v^2}{\lambda}\left(v_{x_1}\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + v_{y_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + v_{z_1}\frac{\partial x_1}{\partial z_1}\right) = -\frac{1}{\alpha_\rho}\cdot\frac{\alpha_p}{\lambda}\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\alpha_\eta}{\alpha_\rho}\frac{\alpha_v}{\lambda^2}\frac{\eta_1}{\rho_1}\cdot\Delta v_{x_1},$$

. . . .

Pentru ca cele două ecuaţii diferenţiale să fie identice, este necesar ca

$$\frac{\alpha_v^2}{\lambda} = \frac{\alpha_p}{\alpha_\rho\lambda} = \frac{\alpha_\eta\,\alpha_v}{\alpha_\rho\,\lambda^2}.$$

Din această dublă egalitate se poate deduce egalitatea următoare

$$\frac{\alpha_v^2}{\lambda}\cdot\frac{\alpha_\rho\,\lambda^2}{\alpha_\eta\,\alpha_v} = \frac{\alpha_v\alpha_\rho\,\lambda}{\alpha_\eta} = 1,$$

din care, înlocuind factorii de proporţionalitate prin valorile lor (2.2), (2, 2′), (2. 2″) obţinem

$$\frac{u_1\rho_1 l_1}{\eta_1} = \frac{u_2\rho_2 l_2}{\eta_2} = \frac{u\rho\, l}{\eta} = \text{const} = \text{Re},$$

observînd că l este o dimensiune oarecare luată drept unitate. Raportul $\frac{\eta}{\rho} = \nu$ poartă numele de vîscozitate cinematică; cu ajutorul ei, relaţia precedentă se scrie

$$\frac{u\,l}{\nu} = \text{Re};$$

Re poartă numele de criteriul sau numărul lui Reynolds, mărimile u, l, ν avînd dimensiunile

$$\langle\nu\rangle = \frac{L^2}{T}, \quad \langle l\rangle = L, \quad \langle u\rangle = \frac{L}{T},$$

ceea ce arată că Re este adimensional. Se observă că acest număr conţine toate datele problemei : $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ vîsco-

zitatea cinematică presupusă constantă, viteza relativă u a fluidului (sau a mobilului în raport cu fluidul) și lungimea l. Din aceasta din urmă se pot deduce toate dimensiunile (liniare) date ale corpului de studiat și care trebuie să apară în soluțiile ecuației diferențiale Navier-Stokes (2.1) prin condițiile la limită.

Principiul similitudinii arată că dacă în mișcarea fluidelor, cînd asupra lor nu acționează forțe exterioare și influența gravitații poate fi neglijată, toate variațiile de viteză și presiune sînt funcție de mărimea Re și că problemele sînt analoge cînd coeficienții lui Reynolds au aceleași valori. Cu alte cuvinte, dacă din datele obținute experimental pe model, se urmărește obținerea unor concluzii valabile pentru original, experimentarea trebuie să se facă astfel încît numerele Reynolds ale modelului și originalului să fie egale.

Pentru a ilustra cele de mai sus să analizăm următorul exemplu simplu : cu ce viteză incidentă trebuie să acționeze aerul, într-un tunel aerodinamic, în condiții de similitudine, asupra unui model cu dimensiunile reduse la scara $\frac{1}{25}$, dacă originalul se construiește pentru o viteză de 3 0 km/h?

Pentru a avea condiții de similitudine trebuie ca în cele două cazuri numerele lor Reynolds să fie egale,

$$\frac{u_2\,\rho_2\,l_2}{\eta_2} = \frac{u_1\,\rho_1\,l_1}{\eta_1},$$

în care u_2, l_2 sînt viteza avionului și, respectiv, o lungime caracteristică acestuia, ρ_2 și η_2 sînt densitatea și respectiv vîscozitatea aerului ; mărimile u_1, l_1, ρ_1, η_1 corespund modelului. Se obține

$$u_1 = u_2\,\frac{l_2}{l_1}\cdot\frac{\eta_1}{\eta_2}\cdot\frac{\rho_2}{\rho_1}. \qquad (2.3)$$

Dacă experiența se face în aer, în aceleași condiții atît în cazul modelului, cît și originalului, se obține $u_1 = u_2\,\frac{l_2}{l_1}$.

Introducînd datele numerice, găsim că $u_1 = 300 \cdot 25 = 7500$ km/h $= 2100$ m/s, viteză care întrece cu mult viteza sunetului în aer ; deci se va experimenta într-un domeniu de viteze în care ecuația (2.1) Navier-Stokes nu mai descrie fenomenul. Pentru a învinge această dificultate, anume pentru a scădea viteza fluidului în tunelul aerodinamic, trebuie ca în formula (2.3) să se reducă termenul $\frac{\eta_1}{\rho_1}$, fie făcînd încercarea cu aer sub presiune, ceea ce mărește pe ρ_1 (și nu influențează apreciabil pe η_1), fie ca încercarea să se execute în apă, a cărei vîscozitate cinematică $\nu_1 = \frac{\eta_1}{\rho_1}$ variază cu temperatura și este de 10 ... 20 de ori mai mică decît a aerului.

Numărul lui Reynolds are o mare importanță în hidro- și aerodinamică, în problemele transmiterii căldurii prin fluide în mișcare, în studiul curgerii lichidelor și gazelor prin conducte, în încercările care se fac, pentru a determina, în bazine sau în tunelele aerodinamice, pe modele-machetă, mărimea și distribuția forțelor care vor acționa în situații reale asupra prototipurilor de nave sau avioane ce urmează să se construiască etc. Ca exemplificare, vom arăta cum se poate determina, în principiu, portanța și rezistența la înaintare a unui anumit profil de aripă de avion, înainte de a se construi originalul, făcîndu-se încercări în tunelul aerodinamic, pe un model-machetă. Am arătat că în conformitate cu ecuația diferențială a lui Navier-Stokes, parametrii care determină mișcarea staționară a unui fluid real (vîscos) incompresibil, în jurul unui corp sînt viteza u, densitatea ρ, presiunea p, vîscozitatea η a fluidului, iar prin condițiile la limită, una dintre dimensiunile liniare l ale corpului, deoarece forma corpului fiind cunoscută, se pot deduce toate celelalte dimensiuni. Între toți acești parametri există o dependență funcțională, care nu poate fi, în general, găsită prin metodele analizei matematice.

Urmează că forța $\vec{F}$ ce va acționa asupra unui corp ce se mișcă, în aceste condiții, într-un fluid, va avea expresia

$$F = pS = f(\rho, u, l, \eta),$$

fiind funcție de parametrii care determină mișcarea fluidului.

Considerînd că această funcție se poate dezvolta într-o serie infinită după puterile variabilelor independente, vom putea scrie

$$F = f(\rho, u, l, \eta) = \sum_i k_i \cdot \rho^{\alpha_i} \cdot u^{\beta_i} \cdot l^{\gamma_i} \cdot \eta^{\delta_i}, \qquad (2.4)$$

k_i fiind un coeficient numeric fără dimensiuni.

Este evident că toţi termenii acestei serii infinite trebuie să aibă aceeaşi ecuaţie dimensională, identică cu aceea a forţei F. Prin urmare, este suficient să se considere un singur produs şi să se scrie

$$\langle F\rangle = \langle \rho^{\alpha} \cdot u^{\beta} \cdot l^{\gamma} \cdot \eta^{\delta}\rangle.$$

Mărimile care intră în această expresie au următoarele dimensiuni :

$$\langle F\rangle = \mathrm{MLT}^{-2}, \quad \langle\rho\rangle = \mathrm{ML}^{-3}, \quad \langle u\rangle = LT^{-1},$$

$$\langle l\rangle = \mathrm{L}, \quad \langle\eta\rangle = ML^{-1}T^{-1}.$$

Introducînd aceste relaţii în ecuaţia dimensională de mai sus, după transformări simple găsim

$$\mathrm{MLT}^{-2} = \mathrm{M}^{\alpha}\,\mathrm{L}^{-3\alpha}\,\mathrm{L}^{\beta}\,\mathrm{T}^{-\beta}\,\mathrm{L}^{\gamma}\,\mathrm{M}^{\delta}\,\mathrm{L}^{-\delta}\,\mathrm{T}^{-\delta} =$$

$$= M^{\alpha+\delta}\,\mathrm{L}^{-3\alpha+\beta+\gamma-\delta}\,\mathrm{T}^{-\delta}.$$

Comparînd exponenţii lui M, L, T găsim trei ecuaţii,

$$\alpha + \delta = 1, \quad -3\alpha + \beta + \gamma - \delta = 1, \quad \beta + \delta = 2.$$

Determinăm din aceste trei ecuaţii (insuficiente pentru determinarea celor patru necunoscute) pe α, β, γ în funcţie de δ şi obţinem

$$\alpha = 1 - \delta, \quad \beta = 2 - \delta, \quad \gamma = 2 - \delta.$$

Astfel conform cu (2.4) avem

$$F = \sum_i k_i\,\rho^{1-\delta}\,u^{2-\delta}\,l^{2-\delta}\,\eta^{\delta} = \rho u^2 l^2 \sum_i k_i \left(\frac{\eta}{\rho u l}\right)^{\delta} =$$

$$= \rho u^2 l^2 \sum_i k_i \left(\frac{u\rho}{\nu}\right)^{-\delta},$$

în care $\nu = \dfrac{\eta}{l}$ este vîscozitatea cinematică.

Se obişnuieşte ca în studiul comportării în mişcarea în aer a profilelor de aripă de avion, să se introducă în formulă în loc de l^2 suprafaţa S a planului AB (care conţine coarda AB) (fig. 2.3), iar în loc de ρ să se scrie $\dfrac{\rho}{2}$. Acest lucru implică o modificare a coeficienţilor numerici k_i, încît în cele din urmă vom scrie

$$F = \frac{\rho}{2}\,u^2\,S \sum_i k_i \left(\frac{ul}{\nu}\right)^{-\delta},$$

în care $\dfrac{ul}{\nu}$ este numărul lui Reynolds. Vom avea deci

$$F = \varphi(\mathrm{Re})\,\frac{\rho}{2}\,u^2 S,$$

unde $\varphi(\mathrm{Re})$ nu poate fi determinată pe considerații de dimensiuni, dar, în orice caz depinde numai de coeficienţii numerici k_i şi de numărul lui Reynolds.

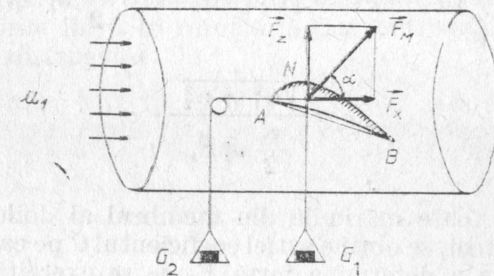


Fig. 2.3.

Avînd în vedere că numerele Reynolds ale modelului machetă şi ale originalului trebuie să fie egale, rezultă că $\varphi(\mathrm{Re})$ va avea în ambele cazuri aceeaşi valoare, pe care o vom nota cu C. Experienţa confirmă că forţele care acţionează asupra originalului şi machetei vor fi date respectiv de următoarele formule :

$$F_O = C\,\frac{\rho_2}{2}\,u_2^2\,S_2,$$

$$F_M = C\,\frac{\rho_1}{2}\,u_1^2\,S_1.$$

Constanta C se determină experimental în tunelul aerodinamic, menţionînd totuşi că realizarea tehnică este destul de complexă.

Partea principală a unui tunel aerodinamic, în care se încearcă modelele-machetă, o constituie un cilindru de dimensiuni mari (pentru ca pereţii lui să nu exercite ac-

țiuni perturbatoare), în care se poate sufla un curent de aer uniform și de viteză dată. Într-un astfel de tunel se introduce, spre exemplu, macheta profilului de aripă de avion pe care dorim să o experimentăm. Aceasta este supusă unui curent de aer de viteză u_1, calculată cum s-a arătat mai sus (păstrîndu-se egalitatea numerelor lui Reynolds pentru original și machetă). Legînd convenabil acest profil într-un punct N, ales prin diferite tatonări pentru a-i realiza înclinarea dorită, cu o serie de corzi prevăzute cu platane, forțele F_z și F_x pot fi măsurate cu ajutorul maselor puse în ambele platane (Fig. 2.3). Făcînd diferite încercări, vom putea determina experimental valorile lui G_1 și G_2, astfel încît

$$F_M = \sqrt{F_z^2 + F_x^2} = \sqrt{G_1^2 + G_2^2} = C \frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1,$$

de unde

$$C = \frac{\sqrt{G_1^2 + G_2^2}}{\frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1}.$$

Întrucît toate mărimile din membrul al doilea pot fi măsurate direct, se obține astfel coeficientul C pe care îl vom folosi pentru a determina forța F_O ce se exercită asupra aripei de avion în mișcarea sa prin aer.

F_z și F_x, care poartă, respectiv, numele de portanță și rezistență la înaintare, sînt egale la rîndul lor cu G_1 și G_2, avînd, după cum ne putem da ușor seama, valorile

$$F_z = G_1 = F_M \sin\alpha = C \sin\alpha \cdot \frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1 = C_z \frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1$$

și

$$F_x = G_2 = F_M \cos\alpha = C \cos\alpha \cdot \frac{\rho_1}{2} u_1 S_1 = C_x \frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1,$$

în care constantele C_z și C_x (cu ajutorul cărora se calculează portanța și rezistența la înaintare în mișcarea în aer a profilului original), se determină experimental pe baza relațiilor de mai sus, astfel încît

$$C_z = \frac{G_1}{\frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1} \quad \text{și} \quad C_x = \frac{G_2}{\frac{\rho_1}{2} u_1^2 S_1}.$$

O aplicație interesantă este folosirea teoriei similitudinii la evaluarea rezistenței clădirilor la acțiunea cutremurelor de pămînt. În afara cutremurelor puternice, se produc destul de des cutremure slabe, înregistrate de seismografe sensibile. Aceste vibrații ale scoarței Pămîntului au anumite frecvențe proprii, caracteristice regiunii în care se produc. Cunoscîndu-se oscilațiile proprii ale scoarței Pămîntului, se construiesc modele de clădiri, care sînt supuse la vibrații de diferite frecvențe. Se urmărește ca aceste modele, supuse la vibrații, să posede cu totul alte oscilații proprii, decît cele ale scoarței Pămîntului din regiunea respectivă. Modelele astfel confecționate servesc apoi la construcția în mare a clădirilor. Se procedează astfel, întrucît s-a constatat că atunci cînd oscilațiile proprii ale clădirilor au aceeați frecvență cu acelea provocate terenului de cutremure, clădirile intră în rezonanță, iar cutremurul devine extrem de distrugător.

Capitolul 3. MODELAREA PRIN ANALOGIE

„... dar analogiile, deşi ne ispitesc totdeauna cel mai tare, sînt şi cele mai false dintre toate ispitele care ne fascinează spiritul".

MARIN PREDA

Modelarea prin analogie cere ca două fenomene analoage, de natură fizică diferită, să fie descrise matematic de ecuaţii cu aceeaşi structură. Modelarea prin analogie, spre deosebire de cea prin similitudine, nu presupune asemănare perfectă între model şi original, ci doar analogia lor. Metoda constă în construirea unui sistem S_M, a cărui descriere matematică este aceeaşi cu a sistemului original S_O, deşi sînt de natură diferită. Analogia dintre sistemele S_O şi S_M devine model atunci cînd, pe baza ei, din cercetarea lui S_M se obţine o cunoaştere în plus, referitoare la sistemul S_O. Dintre posibilităţile de modelare prin analogie, vom discuta mai jos modelul de maşină simplă şi modelarea sistemelor ce execută mişcări oscilatorii armonice.

3.1. Modelul maşină simplă

Maşinile simple sînt sisteme mecanice cu legături complete sau sisteme cu un singur grad de libertate. Asupra lor acţionează două sau mai multe forţe. În cazul general, asupra maşinii acţionează o forţă $\vec{P}$, numită forţă activă, cu ajutorul căreia se urmăreşte deplasarea altei forţe $\vec{R}$, numită rezistenţă. Maşinile simple se folosesc în practică fie pentru o amplificare a forţelor, fie pentru o utilizare mai avantajoasă a lor.

Pentru a stabili raportul dintre forţa activă şi cea rezistentă, vom considera, într-o primă aproximaţie, că legăturile dintre diferitele piese care compun maşina simplă sînt astfel încît frecarea este nulă. Vom recurge în acelaşi timp la principiul lucrurilor mecanice virtuale, enunţat sub forma: pentru ca sistemul ce formează o

maşină simplă să fie în echilibru, într-o poziţie oarecare, este necesar şi suficient, ca dînd sistemului o deplasare virtuală[1] oarecare, compatibilă cu legăturile, suma lucrurilor mecanice virtuale a forţelor direct aplicate să fie nulă,

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{F}_i = 0,$$

$\vec{F}_i$ fiind forţele, iar $\delta\vec{F}_i$ deplasările corespunzătoare.

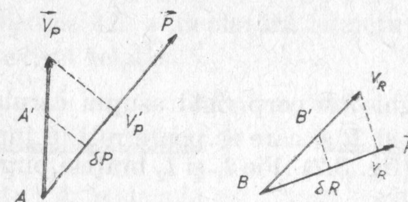


Fig. 3.1.

În virtutea acestui principiu, modelul maşină simplă se poate concepe ca o „cutie neagră" asupra căreia acţionează cele două forţe $\vec{P}$ şi $\vec{R}$ (fig. 3.1). Pentru a găsi condiţia de echilibru, fără frecare, dintre cele două forţe, se imprimă maşinii o deplasare virtuală unică, compatibilă cu legăturile. Fie δP proiecţia deplasării AA' a punctului de aplicaţie al forţei $\vec{P}$ pe direcţia sa şi δR proiecţia deplasării BB' a punctului de aplicaţie al forţei $\vec{R}$ pe direcţia sa.

Conform principiului lucrurilor virtuale, condiţ a de echilibru este

$$\vec{P} \cdot \delta P + \vec{R} \cdot \delta R = 0, \tag{3.1}$$

de unde

$$\frac{P}{R} = -\frac{\delta R}{\delta P} \tag{3.2}$$

Împărţind cu δt, timpul în care se produce deplasarea, şi trecînd la limită, în locul deplasărilor virtuale se obţin vitezele virtuale, astfel încît se poate scrie

$$Pv'_P + Rv'_R = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{P}{R} = -\frac{v'_R}{v'_P}.$$

[1] Denumire improprie folosită în mecanică, în virtutea tradiţiei; este echivalentă cu aceea de deplasare posibilă.

Se obține astfel principiul vitezelor virtuale, ce exprimă forma statică a transmisiei lucrului mecanic în mașini. În limbaj curent, acest principiu se exprimă astfel: ce se cîștigă în forță se pierde în viteză.

Principiul lucrurilor mecanice virtuale exprimă unul dintre aspectele principiului conservării energiei și anume că energia transmisă sistemului prin lucrul mecanic al forței active, se regăsește integral în lucrul mecanic transmis de sistem prin forța rezistentă.

3.1.1. Pîrghii

Se numește pîrghie un corp rigid asupra căruia acționează două forțe $\vec{P}$ și $\vec{R}$ și care se poate roti în jurul unui punct de sprijin O (fig. 3.2). Fie l_1 și l_2 brațele pîrghiei. Se

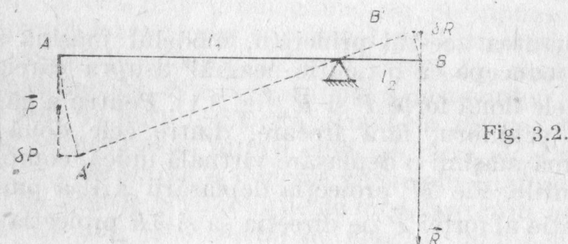


Fig. 3.2.

dă o deplasare AA', compatibilă cu legăturile punctului de aplicație A al forței $\vec{P}$; la rîndul său punctul de aplicație B al forței $\vec{R}$ se va deplasa cu BB'. Proiecțiile deplasărilor AA' și BB' pe direcția forțelor $\vec{P}$ și $\vec{R}$ vor fi δP și, respectiv, δR. Din examinarea figurii, obținem

$$\frac{\delta P}{\delta R} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Conform relației (3.2) și ținînd seama că proiecțiile δP și δR au semne contrare, se poate scrie

$$P \cdot \delta P - R \cdot \delta R = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{P}{R} = \frac{\delta R}{\delta P},$$

deci

$$\frac{P}{R} = \frac{l_2}{l_1},$$

adică am obținut cunoscuta lege a pîrghiilor, conform căreia forțele ce acționează asupra unei pîrghii în echilibru sînt invers proporționale cu brațele pîrghiei.

3.1.2. Asociație de scripete fix cu unul mobil

Forța $\vec{P}$ se aplică firului trecut peste scripetele fix, iar forța $\vec{R}$ se aplică în axul scripetelui mobil (fig. 3.3). Între proiecția δP a deplasării punctului de aplicație a forței $\vec{P}$ și proiecția δR a deplasării punctului de aplicație a forței $\vec{R}$ există relația

$$\delta P = -2\delta R. \tag{3.3}$$

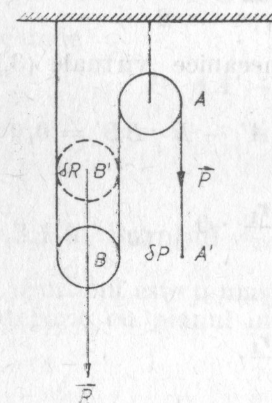


Fig. 3.3.

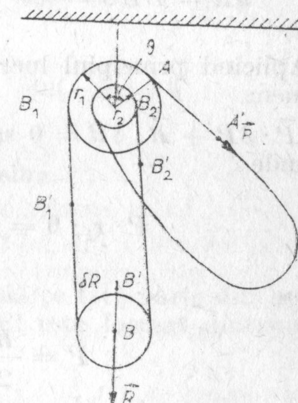


Fig. 3.4.

Aplicînd principiul lucrurilor mecanice virtuale (3.1) și ținînd seama de (3.3), rezultă

$$2P - R = 0 \quad \text{sau} \quad P = \frac{R}{2},$$

adică forța activă este jumătate din valoarea forței rezistențe.

3.1.3. Palanul diferențial

Palanul diferențial (fig. 3.4) este format din două discuri coaxiale ce se rotesc împreună, cu profil special pentru lanț, precum și dintr-un scripete mobil, folosind un lanț fără sfîrșit. La o deplasare $AA' = \delta P$ a punctului de apli-

cație al forței $\vec{P}$, sistemul de discuri fixe se va roti cu un unghi θ, iar orice punct al lanțului trecut peste discul mare de rază r_1 se va ridica cu o lungime

$$AA' = B_1B_1' = r_1\theta.$$

În același timp, orice punct al porțiunii de lanț trecut peste discul mic de rază r_2 va cobori cu o lungime

$$B_2B_2' = r_2\theta,$$

încît punctul de aplicație al forței $\vec{R}$, aplicată în axul scripetelui mobil, se va înălța cu lungimea

$$\delta R = BB' = \frac{B_1B_1' - B_2B_2'}{2} = \frac{(r_1 - r_2)\theta}{2}.$$

Aplicînd principiul lucrurilor mecanice virtuale (3.1), obținem

$$\vec{P}\cdot\delta\vec{P} + \vec{R}\cdot\delta\vec{R} = 0 \text{ sau } P\cdot AA' - R\cdot BB' = 0,$$

de unde

$$P\cdot r_1\cdot\theta = R\,\frac{r_2 - r_1}{2}\cdot\theta$$

sau

$$P = \frac{R}{2}\cdot\frac{r_2 - r_1}{r_1}.$$

3.1.4. Planul înclinat

Planul înclinat este o suprafață plană ce face un unghi α cu planul orizontal (fig. 3.5). Dacă pe un plan înclinat

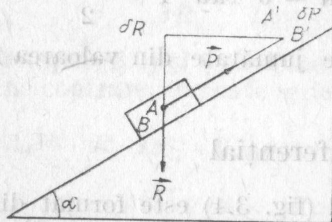


Fig. 3.5.

avem un corp greu, presupus fără frecare, asupra corpului acționează greutatea proprie $\vec{R}$, aplicată în centrul de

greutate al corpului. Pentru a ține corpul în echilibru pe planul înclinat, va trebui să acționăm asupra corpului cu o forță $\vec{P}$. Pentru a stabili condițiile de echilibru îi dăm corpului o deplasare $AA' = \delta P$, virtuală. Punctul de aplicație al forței $\vec{R}$ va suferi la rîndul lui deplasarea BB', a cărei proiecție pe direcția forței $\vec{R}$ va fi

$$\delta R = BB'\cdot\sin\alpha = AA'\cdot\sin(-\alpha).$$

Aplicînd principiul lucrurilor mecanice virtuale (3.1), obținem

$$\vec{P}\cdot\delta\vec{P} + \vec{R}\cdot\delta\vec{R} = 0,$$

de unde

$$P\cdot AA' + R\cdot AA'\,\sin(-\alpha) = 0$$

sau

$$P = R\sin\alpha.$$

3.1.5. Șurubul

Șurubul este o mașină simplă ce face parte din aceeași categorie cu planul înclinat. El este format dintr-un ci-

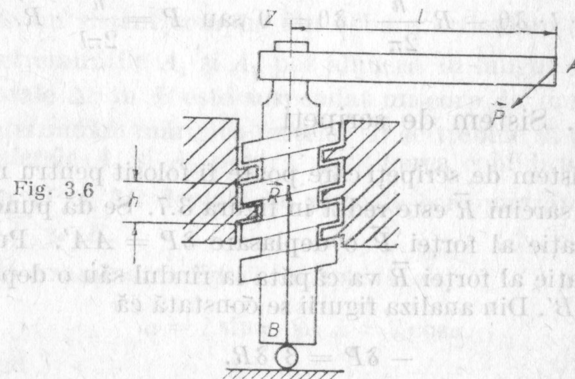


Fig. 3.6

lindru în care este săpat un șanț elicoidal, numit ghivent sau filet, și este terminat în partea superioară cu un tambur ce poate fi rotit (fig. 3.6). Șurubul se îmbină cu o piesă

numită piuliță, care, de cele mai multe ori, este fixă. Presupunînd că frecările dintre șurub și piuliță se pot neglija, se acționează asupra șurubului cu forța $\vec{P}$, aplicată în A, prin intermediul unei manivele sau chei, la distanța l de axa Bz a șurubului și perpendiculară pe aceasta. Forța rezistentă $\vec{R}$ își exercită acțiunea sa în lungul acestei axe.

Pentru o rotație elementară $\delta\theta$, compatibilă cu legăturile, proiecția pe direcția lui $\vec{P}$ a arcului de elice infinit mic, descris de punctul A (care este un arc de cerc de rază l și deschidere $\delta\theta$) va fi

$$\delta P = l \cdot \delta\theta,$$

în timp ce δR are valoarea

$$\delta R = -\frac{h}{2\pi} \cdot \delta\theta,$$

unde h este pasul șurubului.

Aceasta rezultă din faptul că înaintarea șurubului în lungul axei este proporțională cu rotația sa, pasul h al șurubului fiind egal cu valoarea cu care înaintează șurubul pentru o rotație completă. Condițiile de echilibru vor fi deci

$$P \cdot l \cdot \delta\theta - R\frac{h}{2\pi} \cdot \delta\theta = 0 \text{ sau } P = \frac{h}{2\pi l} \cdot R.$$

3.1.6. Sistem de scripeți

Un sistem de scripeți care poate fi folosit pentru ridicarea unei sarcini $\vec{R}$ este redat în figura 3.7. Se dă punctului de aplicație al forței $\vec{P}$ o deplasare $\delta P = AA'$. Punctul de aplicație al forței $\vec{R}$ va căpăta la rîndul său o deplasare $\delta R = BB'$. Din analiza figurii se constată că

$$-\delta P = 3\ \delta R. \tag{3.4}$$

Aplicînd sistemului principiul lucrurilor mecanice virtuale (3.1) și ținînd seama de (3.4), obținem

$$\vec{P} \cdot \delta P + \vec{R} \cdot \delta R = 0; \quad -3P \cdot \delta R + R \cdot \delta R = 0,$$

de unde

$$P = \frac{R}{3}.$$

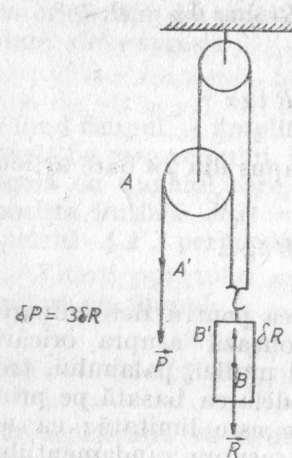


Fig. 3.7.

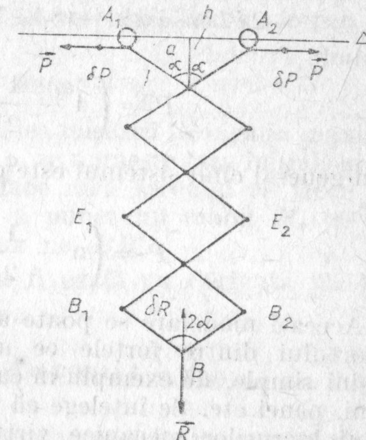


Fig. 3.8.

3.1.7. Sistem de bare articulate

Fie un sistem compus din 8 bare articulate (fig. 3.8).

Extremitățile A_1 și A_2 pot aluneca în lungul unei bare orizontale Δ; în B este suspendat un corp de greutate $\vec{R}$. Să determinăm mărimea forțelor $\vec{P}$ ce trebuie să acționeze în punctele A_1 și A_2 pentru menținerea echilibrului.

Fie δP și δR deplasările virtuale corespunzătoare forțelor $\vec{P}$ și $\vec{R}$.

Din examinarea figurii se constă că

$$a = l \sin\alpha \quad \text{și} \quad h = l \cos\alpha.$$

Întrucît

$$\delta P = da = l\ \cos\alpha\, d\alpha, \text{ iar } dh = -\ l \sin\alpha d\alpha,$$

rezultă

$$\delta R = (8-1)\, dh = -\ (8-1) l\ \sin\alpha d\alpha.$$

Aplicînd principiul lucrurilor mecanice virtuale, obținem

$$2\vec{P}\cdot\delta P+\vec{R}\cdot\delta R=0,$$

deci

$$-2Pl\cos\alpha\,d\alpha+(8-1)\,Rl\sin\alpha\,d\alpha=0,$$

de unde

$$P=\left(4-\frac{1}{2}\right)R\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

și în general cînd sistemul este compus din $2n$ bare articulate,

$$P=\left(n-\frac{1}{2}\right)R\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Aceeași modelare se poate aplica pentru determinarea raportului dintre forțele ce acționează asupra oricărei mașini simple, de exemplu în cazul muflei, palanului, troliului, penei etc. Se înțelege că modelarea bazată pe principiul lucrurilor mecanice virtuale este limitată; ea nu poate da, de exemplu, informații asupra randamentului mașinilor simple și nici nu poate fi, în general, folosită pentru a determina forțele de legătură ce acționează între diferitele piese ale mașinilor.

3.2. Modelarea sistemelor ce execută oscilații armonice

Legile mișcării oscilatorii armonice sînt identice cu legile mișcării proiecției m pe unul dintre diametrele BB'

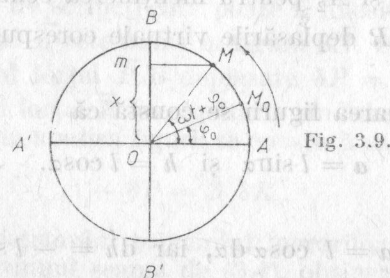


Fig. 3.9.

ale cercului, a unui punct M ce execută o mișcare circulară uniformă, cu viteza unghiulară ω (fig. 3.9). Acest model simplu și abstract poate servi, prin analogie, la determinarea perioadei de oscilație a oricărui sistem ce execută oscilații armonice.

Din examinarea figurii 3.9 se constată că distanța x, numită elongația punctului m (ce execută mișcarea oscilatorie) față de centrul O al cercului, luat ca reper, este dată de expresia

$$x=A\sin(\omega t+\varphi_0), \tag{3.5}$$

t fiind timpul, A amplitudinea mișcării (elongația maximă), egală cu raza cercului, iar φ_0 se numește faza inițială și este egală cu unghiul care îl face raza cercului ce trece prin poziția inițială $M_0(t=0)$ a punctului mobil M, cu diametrul AA', perpendicular pe BB'.

Viteza punctului m va fi egală cu derivata lui x în raport cu timpul,

$$v=\frac{dx}{dt}=A\,\omega\cos(\omega\,t+\varphi_0),$$

iar accelerația va fi derivata vitezei în raport cu timpul sau derivata a doua a lui x în raport cu timpul,

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0).$$

Ținînd seama de (3.5), obținem relația

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x, \tag{3.6}$$

care exprimă legea mișcării oscilatorii armonice. Rezultă că în *mișcarea oscilatorie armonică* accelerația este direct proporțională cu elongația; ele au semne opuse.

Relația (3.6) este o ecuație diferențială de ordinul doi, iar în analiza matematică se demonstrează că are întotdeauna o soluție unică, dacă sînt cunoscute condițiile inițiale care corespund, în cazul nostru, amplitudinii A și fazei inițiale φ_0. De aici urmează că indiferent de metoda folosită, dacă se găsește o soluție, care verifică această ecuație, ea va fi cea căutată.

De aceea, dacă pe orice cale se va găsi o lege de mișcare, exprimată printr-o relație de forma

$$a=-kx, \tag{3.7}$$

k fiind o mărime fizică reală și pozitivă, îi vom putea întotdeauna asocia un număr ω astfel încît

$$\omega^2 = k \text{ și } \omega = \sqrt{k}; \tag{3.8}$$

astfel vom putea găsi viteza unghiulară a unui punct, în mișcare circulară și uniformă, a cărei proiecție pe unul dintre diametrele cercului va avea mișcarea oscilatorie armonică reprezentată de relația (3.7). Legea de mișcare a acestui punct va fi exprimată de soluția

$$x = A \sin (\omega t + \varphi_0) = A \sin(t\sqrt{k} + \varphi_0), \tag{3.9}$$

care verifică relația (3.6).

Prin urmare, întotdeauna o relație de tipul (3.7) reprezintă o mișcare oscilatorie armonică bine determinată, care poate fi scrisă sub forma (3.5) sau (3.6).

Viteza unghiulară ω, numită și pulsație, dată de relația (3.8), este caracteristică oricărei mișcări oscilatorii armonice. Se știe însă că în cazul mișcării circulare uniforme, perioada T este dată de relația

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{3.10}$$

Cum însă perioada mișcării oscilatorii armonice descrise de punctul m este egală cu aceea a mișcării circulare descrise de punctul M, pentru perioada oscilației armonice se obține relația

$$T = 2\pi \frac{1}{\sqrt{k}}. \tag{3.11}$$

Vom folosi această relație într-o serie de aplicații, pentru determinarea perioadei de oscilație, la diferite sisteme ce execută oscilații armonice, neglijînd de fiecare dată forțele de frecare.

3.2.1. Pendulul elastic format din mai multe resorturi legate în serie

Vom considera cazul unui pendul elastic, format din două resorturi de masă neglijabilă, de care este atîrnat

un corp M asimilat cu un punct material (fig. 3.10). În poziția de echilibru (fig. 3.10, b) greutatea corpului este echilibrată de forța elastică a sistemului de resorturi. Cînd corpul este scos din poziția de echilibru și apoi este lăsat liber, el va începe să oscileze în jurul acestei poziții.

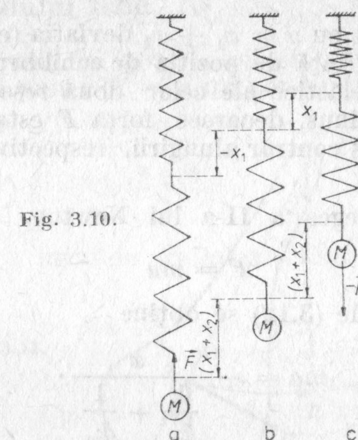


Fig. 3.10.

Mișcarea oscilatorie este produsă în orice moment de o forță elastică variabilă, cu care sistemul de resorturi acționează asupra corpului. Se cunoaște din experiență că alungirea x a unui resort este proporțională cu forța ce acționează asupra lui, $F = -kx$; coeficientul de proporționalitate k depinde de natura resortului și se numește constanta resortului.

Considerăm două poziții oarecare ale corpului în mișcarea sa oscilatorie (fig. 3.10, a și 3.10 c). În aceste poziții resorturile vor acționa asupra corpului de masă m cu o forță F, ce tinde să readucă corpul spre poziția de echilibru. Conform legii a III-a a lui Newton, la rîndul lui, corpul de masă m va acționa asupra celor două resorturi cu o forță egală cu F, dar de semn contrar, producînd alungirile x_1 și respectiv x_2, potrivit relațiilor

$$F = -k_1 x_1 \text{ și } F = -k_2 x_2$$

sau

$$F = -\frac{x_1}{\frac{1}{k_1}} \text{ și } F = -\frac{x_2}{\frac{1}{k_2}},$$

de unde

$$F = -\frac{x_1}{\frac{1}{k_1}} = -\frac{x_2}{\frac{1}{k_2}} = -\frac{x}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}, \quad (3.12)$$

în care am notat cu $x = x_1 + x_2$ deviaţia (elongaţia) corpului de masă m faţă de poziţia de echilibru, iar k_1 şi k_2 sînt constantele elastice ale celor două resorturi. S-a introdus semnul minus, deoarece forţa F este întotdeauna îndreptată în sens contrar alungirii, respectiv comprimării lui x.

Aplicînd legea a II-a lui Newton,

$$F = ma$$

şi ţinînd seama de (3.12) se obţine

$$ma = -\frac{x}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}.$$

Expresia arată că mişcarea sistemului de resorturi este o mişcare oscilatorie armonică a cărui coeficient de proporţionalitate este

$$k = \frac{1}{\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)},$$

de unde, ţinînd seama de (3.11), obţinem pentru perioada de oscilaţie a pendulului elastic

$$T = 2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}.$$

Dacă avem în serie un număr mai mare de resorturi cu constante elastice diferite, evident că vom obţine

$$T = 2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \ldots\right)}.$$

De asemenea, dacă pendulul elastic este format dintr-un singur resort de constantă k, urmînd acelaşi raţionament,

vom obţine relaţia

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

3.2.2. Pendulul fizic

Orice corp solid ce poate oscila în jurul unei axe ce trece printr-un punct O' este un pendul fizic (fig. 3.11).

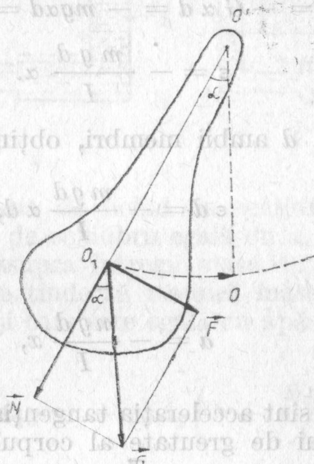


Fig. 3.11.

Din examinarea figurii se observă că, dacă pendulul este scos din poziţia de echilibru O, greutatea $\vec{G}$, aplicată în centrul de greutate, se descompune în două forţe: $\vec{F}$ şi $\vec{N}$. Forţa $\vec{N}$ este anulată de reacţiunea punctului de sprijin, încît numai componenta $\vec{F}$, îndreptată spre poziţia de echilibru, produce oscilaţiile pendulului.

Forţa $\vec{F}$ este egală în modul cu

$$F = -G \sin\alpha,$$

iar pentru amplitudini mici $\alpha < 4° - 5°$, $\sin\alpha \simeq \alpha$, încît putem scrie

$$F = -G\alpha. \quad (3.13)$$

Această forţă acţionează în centrul de greutate al corpului şi este îndreptată spre punctul O, care se consideră punct de origine a mişcării centrului de greutate.

Aplicînd formula sub care se prezintă legea a doua a mecanicii în cazul mişcării de rotaţie, putem scrie

$$M = I\,\varepsilon, \tag{3.14}$$

în care M este momentul forţei $\vec{F}$ faţă de punctul fix O', I — momentul de inerţie al corpului faţă de axa de rotaţie ce trece prin O', iar ε acceleraţia unghiulară. Notînd cu d distanţa de la centrul de greutate O_1 la O', obţinem

$$M = Fd = -G\,\alpha\,d = -mg\alpha d = I\varepsilon \text{ sau}$$

$$\varepsilon = -\frac{m\,g\,d}{I}\,\alpha.$$

Înmulţind cu d ambii membri, obţinem

$$\varepsilon\,d = -\frac{m\,g\,d}{I}\,\alpha\,d,$$

de unde

$$a = -\frac{m\,g\,d}{I}\,x, \tag{3.15}$$

în care a şi x sînt acceleraţia tangenţială şi respectiv elongaţia centrului de greutate al corpului. Semnul minus s-a introdus deoarece forţa $\vec{F}$ are sensul contrar elongaţiei x.

Observăm că relaţia (3.15) este expresia acceleraţiei unei oscilaţii armonice, încît conform cu (3.7) putem scrie

$$k = \frac{m\,g\,d}{I},$$

de unde, conform cu (3.11),

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m\,g\,d}}\,.$$

3.2.3. Mişcarea oscilatorie a coloanei de lichid în două vase comunicante

Vom considera două vase comunicante cu ariile secţiunilor egale cu A_1 şi, respectiv, A_2, iar lungimile coloanelor de lichid egale cu l_1 şi l_2 (fig. 3.12).

Dacă se denivelează lichidul şi apoi se lasă liber, coloana de lichid va căpăta o mişcare oscilatorie în jurul poziţiei de echilibru AA'. Din examinarea figurii 3.12, b, se constată

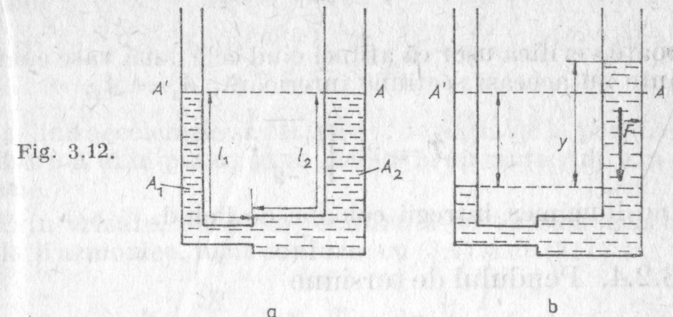


Fig. 3.12.

că atunci cînd coloana de lichid cu secţiunea A_1 are o abatere de la poziţia de echilibru egală cu x, datorită presiunii hidrostatice, asupra întregii mase de lichid va acţiona o forţă F, care tinde să readucă masa de lichid în poziţia de echilibru şi care este egală cu apăsarea coloanei y de lichid,

$$F = -\rho g A_2 y = -\rho g A_2\left(x + \frac{xA_1}{A_2}\right) =$$

$$= -g(A_1 + A_2)x.$$

Pe de altă parte, aplicînd legea a doua a mecanicii, obţinem

$$F = ma = \rho(l_1A_1 + l_2A_2)a.$$

Egalînd relaţiile pentru F, se obţine

$$\rho(l_1A_1 + l_2A_2)\,a = -\rho g(A_1 + A_2)x,$$

de unde

$$a = \frac{g(A_1 + A_2)}{l_1A_1 + l_2A_2}\,x.$$

Se observă că oscilaţiile coloanei de lichid sînt oscilaţii armonice, pentru care

$$k = \frac{g(A_1 + A_2)}{l_1A_1 + l_2A_2}$$

şi deci perioada de oscilaţie va fi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1A_1 + l_2A_2}{g(A_1 + A_2)}}.$$

Se poate verifica uşor că atunci cînd cele două vase comunicante au aceeaşi secţiune interioară, $A_1 = A_2$,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}},$$

l fiind lungimea întregii coloane de lichid.

3.2.4. Pendulul de torsiune

Pendulul de torsiune este format dintr-un corp legat de un fir vertical ce poate executa oscilaţii de rotaţie în planul orizontal (fig. 3.13).

Experienţa arată că dacă scoatem pendulul din echilibru, răsucindu-l în jurul unei axe ce se confundă cu direcţia firului, prin aplicarea unui cuplu de forţe, al cărui moment este $M = 2rF$ (fig. 3.13), firul determină un cuplu de rezistenţă proporţional cu unghiul de răsucire α, deci

$$M = 2rF = -K\,\alpha,$$

unde K este un coeficient de proporţionalitate, între momentul cuplului de torsiune şi unghiul α.

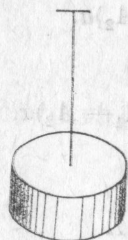


Fig. 3.13.

Egalînd expresia momentului M din legea a doua a mecanicii aplicată corpurilor în mişcare de rotaţie,

$$M = I\,\varepsilon,$$

cu expresia momentului forţei F se obţine

$$I\varepsilon = -K\alpha \text{ sau } I\,\varepsilon\, r = K\alpha r \text{ şi } Ia = -Kx,$$

de unde

$$a = -\frac{K}{I}x,$$

a şi x fiind acceleraţia şi, respectiv, deviaţia de la poziţia de echilibru a unui punct ce se găseşte la distanţa r de axa de rotaţie.

Prin urmare, punctele pendulului de torsiune execută oscilaţii armonice, încît conform cu (3.7) şi cu (311)

$$k = \frac{K}{I} \text{ sau } T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}.$$

3.2.5. Pendulul bifilar

Pendulul bifilar este compus dintr-o bară orizontală AB, de grosime neglijabilă şi grea, de lungime egală cu

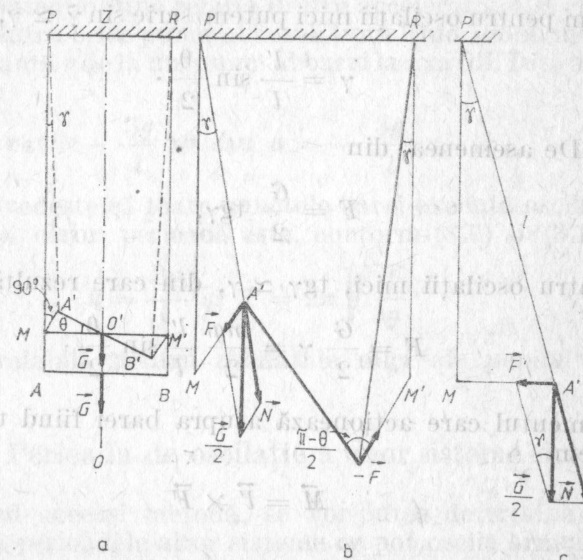


Fig. 3.14.

l', suspendată de capete prin două fire inextensibile şi fără greutate, de lungime l (fig. 3.14). Bara orizontală AB poate

oscila în jurul unei axe fixe, verticale OZ, ce trece prin mijlocul ei.

Bara orizontală AB, de lungime l', are greutatea $\vec{G}$, ce se descompune în două componente egale cu $\frac{\vec{G}}{2}$ şi care acţionează la capetele celor două fire de suspensie. Cînd pendulul este deviat cu un unghi mic θ şi adus din poziţia AB în poziţia $A'B'$, forţa $\frac{\vec{G}}{2}$, aplicată în A', se descompune în două componente: $\vec{N}$, în direcţia firului de suspensie $A'P$, şi alta $\vec{F}$, perpendiculară pe $\frac{\vec{G}}{2}$, ambele situate în planul triunghiului $PA'M$ (fig. 3.14, c). Forţa $\vec{N}$ este anulată de reacţiunea firului.

Din examinarea figurilor 3.14, b şi 3.14, c, obţinem

$$MA' = l\sin\gamma = l'\sin\frac{\theta}{2} \quad \text{sau} \quad \sin\gamma = \frac{l'}{l}\sin\frac{\theta}{2}.$$

Cum pentru oscilaţii mici putem scrie $\sin\gamma \simeq \gamma$, vom avea

$$\gamma = \frac{l'}{l}\sin\frac{\theta}{2}.$$

De asemenea, din

$$F = \frac{G}{2}\,\mathrm{tg}\gamma,$$

pentru oscilaţii mici, $\mathrm{tg}\gamma \simeq \gamma$, din care rezultă

$$F = \frac{G}{2}\gamma = \frac{mg}{2}\,\frac{l'}{l}\sin\frac{\theta}{2}. \qquad (3.16)$$

Momentul care acţionează asupra barei fiind un vector, avem

$$\vec{M} = \vec{l'} \times \vec{F}$$

sau

$$M = l'F\sin\frac{\pi-\theta}{2} = l'F\cos\frac{\theta}{2}$$

şi, ţinînd seama de (3.16), se obţine

$$M = \frac{mgl'^2}{2l}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{mgl'^2}{4l}\sin\theta.$$

Şi întrucît pentru oscilaţii de amplitudine mică, $\sin\theta \simeq \theta$ putem scrie

$$M = \frac{mgl'^2}{4l}\cdot\theta.$$

Aplicînd legea a doua a mecanicii pentru corpurile în mişcare de rotaţie şi introducînd expresia momentului de inerţie al unei bare în raport cu axa de rotaţie, obţinem

$$M = I\varepsilon = \frac{ml'^2}{12}\cdot\varepsilon,$$

ε fiind acceleraţia unghiulară a barei.

Egalînd aceste două expresii ale lui M, rezultă

$$\frac{ml'^2}{12}\cdot\varepsilon = -\frac{mgl'^2}{4l}\theta \quad \text{sau} \quad \varepsilon = -\frac{3g}{l}\theta, \qquad (3.17)$$

din care putem obţine relaţia dintre acceleraţia a şi elongaţia x, pentru orice punct al barei, înmulţind ambii membri cu distanţa r de la un punct al barei la axa OZ. Într-adevăr, avem

$$r\varepsilon = -\frac{3g}{l}r\theta \quad \text{sau} \quad a = -\frac{3g}{l}x,$$

ceea ce dovedeşte că toate punctele barei execută oscilaţii armonice a căror perioadă este, conform (3.7) şi (3.11),

$$k = \frac{3g}{l} \quad \text{şi} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}},$$

expresie valabilă pentru oscilaţiile mici ale pendulului bifilar.

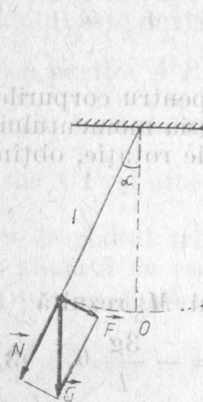
3.2.6. Perioada de oscilaţie a unor sisteme simple

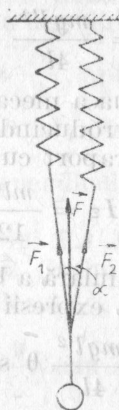
Aplicînd aceeaşi metodă, se vor putea determina cu uşurinţă şi perioadele altor sisteme ce pot oscila armonic.

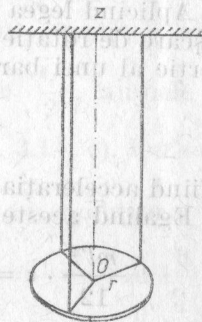
Pendulul matematic este compus dintr-un corp asimilat cu un punct material greu, ce poate oscila la capătul unui fir de lungime l, inextensibil şi fără greutate (fig. 3.15).

Pentru oscilații de amplitudine mică, făcînd aproximația $F \simeq -G\alpha$, se găsește că

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$


Fig. 3.15.


Fig. 3.16.


Fig. 3.17.

Pendulul elastic format din două resorturi așezate în paralel (fig. 3.16). Dacă se notează cu k_1 și k_2 constantele celor două resorturi și cu m masa corpului, pentru perioadă se obține expresia

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

Pentru demonstrarea relației de mai sus, se consideră mărimea unghiului α neglijabilă, încît forța

$$\vec{F} \simeq \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

$\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ fiind forțele cu care cele două resorturi acționează asupra corpului de masă m.

Pendulul trifilar (fig. 3.17). Este compus dintr-un disc cu raza r, cu moment de inerție I, masă m, suspendat prin trei fire verticale de lungime l. Întreg sistemul poate oscila în jurul unei axe verticale ce trece prin centrul discului. Raționînd la fel ca în cazul pendulului bifilar, se obține

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Il}{mgr^2}}.$$

Dacă discul este cilindric, introducînd valoarea momentului de inerție,

$$I = \frac{mr^2}{2},$$

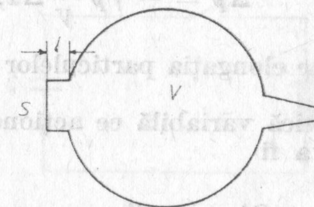
relația se reduce la

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

3.2.7. Rezonatorul Helmholtz

Rezonatorul Helmholtz are o formă aproape sferică, gol în interior și cu două deschideri diametral opuse (fig. 3.18). În funcție de dimensiunile sale, acest tip de rezonator este capabil să intre în rezonanță cu un sunet de o anumită frecvență.

Modelul oscilatorului armonic, folosit în exemplele precedente, permite să se calculeze perioada oscilațiilor proprii a aerului în rezonatorul Helmholtz. Se presupun cunoscute suprafața S a secțiunii gîtului rezonatorului, l — lungimea lui, V — volumul cavității sferice și c — viteza sunetului în aer. Din cauza frecvenței mari, datorită com-


Fig. 3.18.

primărilor și destinderilor aerului din rezonator, variațiile de temperatură nu vor avea timp să se egaleze prin conductibilitate termică în perioada unei oscilații. Aproximînd aerul cu un gaz perfect, aceste variații se vor produce adiabatic, conform relației lui Poisson,

$$pV^{\gamma} = \text{const},$$

unde p este presiunea constantă a aerului din interiorul rezonatorului (egală cu cea atmosferică), V — volumul, iar γ — raportul dintre căldura masică la presiune constantă şi căldura masică la volum constant.

Pentru variaţii mici de presiune Δp şi de volum ΔV în unda sonoră, putem scrie

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V)^{\gamma} = pV^{\gamma}$$

sau

$$1 + \frac{\Delta p}{p} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^{-\gamma}.$$

Dezvoltînd membrul al doilea după formula binomului lui Newton, obţinem

$$1 + \frac{\Delta p}{p} = 1 - \gamma\frac{\Delta V}{V} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2}\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2.$$

Neglijînd termenii de ordin superior, în continuare rezultă

$$\Delta p = -\gamma p\frac{\Delta V}{V}.$$

Mărimea variaţiilor presiunii la trecerea undei sonore se numeşte presiune sonoră sau suplimentară. Considerînd întreaga masă de aer din gîtul rezonatorului ca un piston ce oscilează şi acţionează asupra aerului din interiorul său, obţinem

$$\Delta p = -\gamma p\frac{S}{V}\Delta x,$$

în care Δx este elongaţia particulelor din gîtul rezonatorului.

Forţa elastică variabilă ce acţionează asupra întregii suprafeţe S va fi

$$F = S\Delta p \text{ sau } F = -\gamma p\frac{S^2}{V}\Delta x,$$

de unde, notînd cu m şi ρ masa şi, respectiv, densitatea aerului din gîtul rezonatorului şi cu a acceleraţia, se obţine

$$F = ma = Sl\rho a = -\gamma p\frac{S^2}{V}x$$

(am înlocuit elongaţia Δx cu x), încît

$$a = -\frac{\gamma}{V}\frac{p}{\rho}\frac{S}{l}x.$$

Pe de altă parte, se ştie că viteza sunetului în aer este

$$c = \sqrt{\frac{p\gamma}{\rho}} \text{ sau } \gamma = \frac{c^2\rho}{p},$$

de unde

$$a = -\frac{c^2 S}{Vl}x$$

şi, conform cu (3.7) şi cu (3.11), perioada oscilaţiilor proprii ale rezonatorului (care intră în rezonanţă cu un sunet avînd aceeaşi perioadă) este

$$T = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{Vl}{S}}$$

Frecvenţa de rezonanţă a rezonatoarelor depinde aşadar de dimensiunile acestora.

3.2.8. Circuitul oscilant

Vom considera un circuit oscilant, compus dintr-un condensator C, o bobină cu inductanţă L şi de rezistenţă

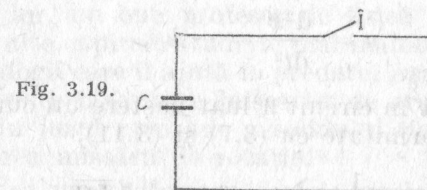


Fig. 3.19.

neglijabilă şi un întrerupător I (fig. 3.19). După încărcarea condensatorului, la descărcarea sa, în circuit ia naştere un curent electric. La rîndul său, curentul electric variabil dă naştere unui cîmp magnetic variabil. Rezultă că energia cîmpului electrostatic, mai precis energia dielectricului condensatorului, $W_e = \frac{1}{2}CU^2$, în timpul descărcării con-

densatorului suferă o variație echivalentă de creștere a energiei bobinei cu inductanța L, sub formă de energie a cîmpului magnetic $W_m = \frac{1}{2} L I^2$, astfel încît întotdeauna va exista relația: $-\mathrm{d}W_e = \mathrm{d}W_m$. Ca urmare a variației energiilor în cele două sisteme fizice, condensatorul și bobina, în circuitul respectiv va lua naștere un curent electric alternativ.

Pentru a descrie matematic acest fenomen se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff, considerînd că în fiecare moment suma tensiunilor la bornele condensatorului și ale bobinei este egală cu zero,

$$u_e + u_L = 0,$$

în care

$$u_e = \frac{Q}{C} \quad \text{și} \quad u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

deci

$$\frac{Q}{C} + L\frac{di}{\mathrm{d}t} = 0;$$

derivînd în raport cu timpul, obținem

$$\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \text{ sau } \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{LC}i.$$

Ultima ecuație diferențială este analogă cu (3.6) și (3.7),

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx,$$

ceea ce arată că în circuit a luat naștere un curent sinusoidal. În conformitate cu (3.7) și (3.11),

$$k = \frac{1}{LC}, \text{ iar } T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Ultima relație se numește formula lui Thomson și ne dă expresia perioadei de oscilație a curentului oscilant.

★

Se mai pot găsi multe alte exemple care să satisfacă modelul simplu al oscilatorului armonic, arătat la începutul acestei secțiuni. Ne dăm ușor seama că modelul ales este limitat; el nu poate da indicații pentru cazurile în care forțele de frecare nu pot fi neglijate, cînd oscilațiile devin amortizate și nici în cazul oscilațiilor întreținute. În aceste cazuri trebuie construite alte modele, care să acopere domenii mai largi. Vom descrie în paragrafele următoare cîteva astfel de modele. Aceste modele au calitatea de a fi suficient de intuitive și folositoare din punct de vedere metodic, ceea ce face ca modelele mecanice să poată fi întrebuințate, prin analogie, pentru înțelegerea curentului electric, a curenților ce se produc în circuitele oscilante, a rezonanței etc. La rîndul lor, unele sisteme mecanice vibratorii complexe pot fi studiate cu mai multă ușurință dacă sînt modelate prin circuite electrice. Folosirea modelelor electromecanice pentru înțelegerea altor capitole ale fizicii trebuie totuși făcută cu multă prudență și este întotdeauna necesar să se arate limitarea lor pentru a evita o alunecare spre mecanicism.

3.3. Analogii electromecanice

3.3.1. Modele analogice, mecanice, folosite pentru înțelegerea fenomenelor privind curentul electric continuu

Multe dintre temele care trebuie însușite de către cei care studiază fizica sînt destul de aride, greu de înțeles. Pentru înțelegerea lor, un bun profesor de fizică face anumite legături cu alte capitole studiate mai înainte, realizează o serie de analogii care îl ajută în predare. Așa, de exemplu, analogia care se face între mișcarea de translație și cea de rotație în jurul unei axe a solidului rigid facilitează mult predarea mișcării de rotație.

În cele ce urmează vom descrie unele modele prin analogie, plecînd de la ideea că stăpînirea unei rezerve de analogii de către fiecare profesor este un tezaur care numai prin experiență poate fi obținut și dezvoltat.

a. **Analogia dintre circuitul electric și modelul său gravitațional.** Deși tinerii posedă unele cunoștințe de electricitate din școala generală, este uneori dificil să-i facem să înțeleagă mecanismul transportului de purtători de sarcini, într-un circuit electric. Pentru facilitarea înțe-

legerii acestei probleme, se poate apela la analogia dintre un circuit electric simplu și modelul său gravitațional.

În acest sens, fie un circuit electric simplu, compus din sursa electrică E, cu rezistența internă r, și rezistorul R (fig. 3.20). Sensul curentului electric coincide cu sensul de

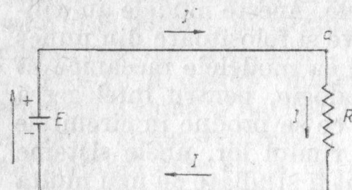


Fig. 3.20.

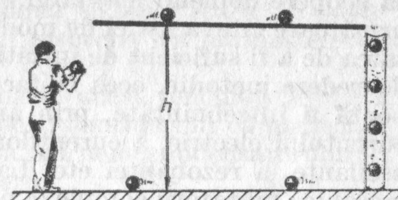


Fig. 3.21.

mișcare a purtătorilor de sarcină pozitivă, în cazul nostru sensul acelor de ceasornic, se pune problema menținerii unei intensități de curent electric constante, fapt ce este asigurat de sursa de energie E. Variația energiei sursei, în timpul transferului de sarcini, determină un lucru mecanic. Conform principiului întîi al termodinamicii, dacă conductorul din care este confecționat rezistorul R este izolat ($Q = 0$), lucrul mecanic respectiv contribuie integral la creșterea corespunzătoare a energiei interne, deci la încălzirea conductorului. În caz contrar, o parte a lucrului mecanic determină creșterea energiei interne, într-o măsură mai mare sau mai mică, iar altă parte se regăsește în căldura transferată spre exterior.

În figura 3.21 este desenat analogul gravitațional al circuitului electric, prezentat mai sus. Locul sursei electrice este luat de om, care, prin ridicarea bilelor, efectuează asupra acestora un lucru mecanic, trimițîndu-le printr-un jgheab, într-un vas cilindric, în care se află un lichid vîscos. Din acest vas, bilele ajung din nou la om. Mișcarea bilelor este uniformă atît pe cele două jgheaburi, de sus și de jos, cît și în vasul cilindric, dacă omul ridică și dă drumul la bile în mod ritmic, depunînd de fiecare dată același efort.

Creșterea temperaturii lichidului vîscos are loc în urma creșterii energiei sale interne, ca urmare a lucrului mecanic efectuat de bile, iar lucrul mecanic rezultă în urma scăderii energiei cîmpului gravitațional.

b. **Definiția curentului electric.** Curentul electric se definește ca transportul de electroni liberi (purtători de

sarcină) printr-un fir conductor, stabilirea curentului prin fir realizîndu-se instantaneu. Faptul că viteza de antrenare a electronilor este mai mică decît 1 mm/s, contrazice definiția de mai sus și, în realitate, curentul electric nu este o simplă translație de electroni, mecanismul său fiind ceva mai complicat.

Pentru a scoate în evidență acest mecanism, se poate imagina următoarea experiență. Vom considera un tub plin cu apă, care are un capăt închis și prevăzut cu un indicator de presiune, iar la celălalt capăt este adaptată o pompă. Tubul fiind plin cu apă, introducînd cu ajutorul pompei o cantitatea suplimentară de apă, se produce un excedent de presiune care se transmite de-a lungul tubului, pînă la capătul opus. Viteza de propagare a undei este independentă de translația moleculelor lichidului și deci, în acest caz, nu moleculele de apă se deplasează, ci unda de presiune.

În mod asemănător, în cazul curentului electric nu electronii se deplasează, ci unda electromagnetică. Cînd printr-un conductor metalic trece un curent electric, toți electronii liberi din conductor intră într-o anumită stare de vibrație, care se propagă prin conductor cu viteza luminii.

c. **Analogia dintre circuitul hidrodinamic și cel electric.** Să considerăm un sistem de tuburi din sticlă, în care se găsește apă, capătul B fiind închis (fig. 3.22 a). Se constată că nivelele coloanelor de apă din tuburile piezometrice sînt aceleași (principiul vaselor comunicante), fapt ce arată că lichidul din conducta AB apasă asupra peretelui

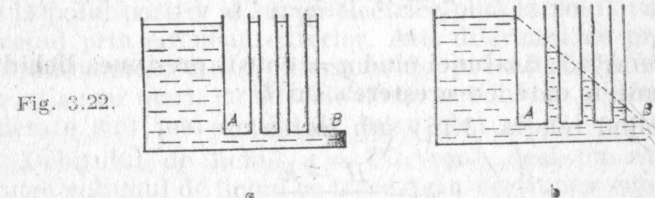


Fig. 3.22.

cu aceeași presiune pe toată lungimea conductei, presiune măsurată de înălțimea coloanelor de lichid.

Dacă se deschide capătul B, lichidul începe să curgă, iar nivelul acestuia în tuburi scade, pe măsură ce ne apropiem de punctul B, unde nivelul este zero (experiența lui

Bernoulli). Mai mult, se constată că aceste nivele se află pe o linie dreaptă, ceea ce arată că presiunea scade uniform pînă la zero, de-a lungul coloanei AB (fig. 3.22, b).

Fie q debitul conductei AB, unde $q = \frac{V}{t}$, adică volumul lichidului care se scurge prin conductă, raportat la timp. Considerînd un lichid incompresibil, avînd viscozitatea dinamică η şi o conductă de lungime l şi cu raza r, suficient de mică, încît curgerea să fie laminară, se poate aplica legea lui Poiseuille,

$$q = K_1 \frac{(p_A - p_B) r^4}{l\eta},$$

care arată că debitul este proporţional cu diferenţa de presiune ce produce curgerea şi cu puterea a patra a razei conductei şi este invers proporţional cu lungimea conductei şi cu coeficientul de viscozitate al lichidului.

Dacă se au în vedere două puncte oarecare de pe conductă, cărora le corespund înălţimile coloanelor H şi h ale lichidului, în tuburile piezometrice,

$$p_A - p_B = \rho g(H - h),$$

deci

$$q = \frac{Kr^4}{\eta} \cdot \frac{H - h}{l}, \qquad (3.18)$$

de unde

$$h = H - \frac{ql\eta}{Kr^4},$$

ceea ce arată că atunci cînd $q =$ const, presiunea lichidului scade o dată cu creşterea lui l.

Punînd relaţia (3.18) sub forma

$$q = \frac{H - h}{\eta \frac{l}{Kr^4}}$$

şi notînd

$$R = \eta \frac{l}{Kr^4}, \qquad (3.19)$$

numită rezistenţa hidrodinamică, se obţine

$$q = \frac{H - h}{R}, \qquad (3.20)$$

ceea ce arată că debitul este proporţional cu diferenţa de presiune dintre capetele conductei şi invers proporţional cu rezistenţa hidrodinamică R. Dacă se are în vedere re-

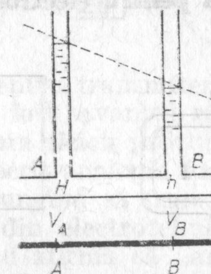


Fig. 3.23.

laţia de definiţie a presiunii, $p = F/S$, se constată că debitul depinde de forţa pe unitate de suprafaţă cu care este împins lichidul şi de rezistenţa de frecare a lichidului.

Să transpunem rezultatele din hidrodinamică la transportul electronilor printr-un conductor electric.

Să observăm în primul rînd că diferenţei de presiune, $H - h$, responsabilă de curgerea lichidului, îi corespunde diferenţa de potenţial $V_A - V_B$ (fig. 3.23), datorită căreia are loc transportul de electroni. În timpul curgerii lichidului, presiunea se micşorează continuu; în mod asemănător, potenţialul electric scade de-a lungul circuitului, de la polul pozitiv al sursei electrice pînă la polul negativ, trecînd prin circuitul exterior. Atît diferenţa de presiune hidrodinamică, cît şi diferenţa de potenţial electric sînt cu atît mai mari, cu cît cele două perechi de puncte considerate sînt mai depărtate între ele.

Debitului de lichid $q = V/t$, egal deci cu raportul dintre volumul de lichid ce trece prin secţiunea conductei şi timpul t, îi corespunde intensitatea curentului electric $I = Q/t$, mărimile q şi I rămînînd constante, prima de-a lungul conductei considerate, iar a doua, pe întreg circuitul.

Dacă se are în vedere relaţia (3.20) pentru debitul de lichid, o relaţie asemănătoare se poate scrie şi pentru

intensitatea curentului electric,

$$I = \frac{V_A - V_B}{R}, \qquad (3.21)$$

ceea ce arată că rezistenței hidrodinamice îi corespunde rezistența electrică în circuitul electric. Relațiile (3.20) și (3.21) reprezintă legea lui Ohm, prima pentru hidrodinamică și a doua pentru electrocinetică.

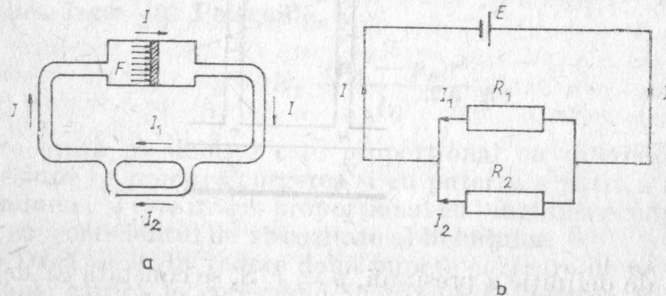


Fig. 3.24.

La fel ca și rezistența hidrodinamică, se constată că și rezistența electrică, pentru circuite filiforme, este proporțională cu lungimea conductorului. Variația rezistenței cu secțiunea este ceva mai complicată în hidrodinamică decît în electrocinetică.

Toate cele spuse mai sus reies și mai bine din analizarea comparativă a celor două circuite din figura 3.24 : circuitul hidrodinamic (a) și circuitul electric (b). Dacă W este energia sau lucrul mecanic efectuat la deplasarea pistonului pe distanța l, atunci

$$W = Fl = pS,$$

unde $p = F/S$ este presiunea exercitată pe pistonul de secțiune S. Deoarece Sl este volumul de lichid deplasat în timpul t, rezultă

$$Sl = V = q\,t,$$

unde q este debitul de lichid. Rezultă imediat $W = p\,q\,t$ sau

$$W = (H - h)q\,t.$$

În mod analog, energia transferată de electroni între cele două puncte ale circuitului va fi

$$W = (V_A - V_B)It = U\,I\,t.$$

Revenind la hidrodinamică, credem că este interesant de amintit că primul care a intuit posibilitatea și a construit

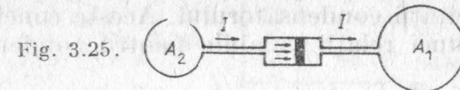


Fig. 3.25.

dispozitivele necesare pentru transmiterea energiei mecanice prin medii lichide a fost savantul român G. Constantinescu, întemeind ramura fizicii intitulată sonicitate. G. Constantinescu a descoperit analogia formală dintre electronică și sonicitate, ajungînd să transpună o mare varietate a dispozitivelor din electrotehnică în sonicitate. Însuși G. Constantinescu afirma că „analogiile sînt atît de mari din punct de vedere teoretic, încît unui inginer care ar citi o carte de sonicitate i s-ar părea că citește o carte de electricitate".

d. **Analogia mecanică a unui condensator.** Să observăm din nou circuitul hidrodinamic din figura 3.24, a, analog circuitului electric din figura 3.24, b. Cele două capete ale corpului de pompă nu vor mai fi unite între ele printr-o conductă, ci vor fi legate la două rezervoare A_1 și A_2 (fig. 3.25).

În întreg sistemul se află un fluid compresibil, în echilibru, la presiunea p_0. Acționînd asupra pistonului cu forța F, un volum de fluid V este scos din compartimentul A_2 și introdus în A_1. În acest fel, presiunea crește în A_1 și devine

$$p_1 = p_0 + C_1V,$$

iar în A_2 scade,

$$p_2 = p_0 - C_2V.$$

Între cele două rezervoare se stabilește diferența de presiune

$$p = p_1 - p_2 = (C_1 + C_2)V = CV,$$

unde C_1, C_2 și C sînt constante ce depind de compresibilitatea fluidului și de volumul rezervoarelor. Dacă S este suprafața pistonului, echilibrul se stabilește atunci cînd

$F/S = p$. În cazul în care echilibrul este stabilit, nu mai există diferență de presiune, iar curgerea fluidului încetează.

Acest dispozitiv reprezintă analogul mecanic al condensatorului și anume: rezervoarele A_1 și A_2 sînt analoage armăturilor condensatorului, volumul de fluid V este analog cu sarcina electrică Q, diferența de presiune este analogă cu diferența de potențial, iar constanta C este analogă capacității condensatorului. Aceste concluzii permit scrierea unei relații valabile pentru condensatori și anume

$$U = CQ,$$

U fiind tensiunea sau diferența de potențial dintre plăcile condensatorului.

Dăm mai jos, în sinteză, unele elemente și mărimi analoage ale circuitului hidrodinamic și celui electric.

Circuit hidrodinamic	Circuit electric
Pompă	Sursa de tensiune
Conductă	Conductor electric
Rezervor de lichid	Armătură a condensatorului
Diferența de presiune, $H - h$	Diferența de potențial, $V_A - V_B$
Volumul fluidului, V	Sarcina electrică, Q
Rezistența hidrodinamică, R	Rezistența electrică, R
Debitul volumic de lichid	Intensitatea curentului electric
$q = V/t$	$I = Q/t$
Legea lui Ohm $q = \frac{H - h}{R}$	Legea lui Ohm $I = \frac{V_A - V_B}{R}$

3.3.2. Analogii rezultate din studiul circuitelor electrice de curent continuu și al celor de curent alternativ

a. **Introducere în metoda de reprezentare complexă a mărimilor sinusoidale.** Vom relua funcția sinusoidală de timp (3.5) scrisă sub forma

$$v = V_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Această funcție trece prin aceleași valori și în același sens în intervale de timp egale cu perioada T. Expresia

de mai sus definește o mișcare oscilatorie armonică. Constanta V_m se numește amplitudine, ea fiind egală cu valoarea maximă pe care o poate avea funcția v. Mărimea

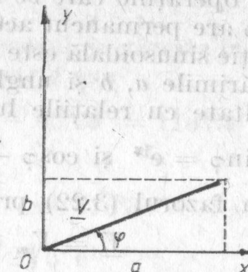


Fig. 3.26.

$\alpha = \omega t + \varphi$ se numește fază, iar φ fază inițială. Sînt cunoscute relațiile următoare dintre pulsația ω, perioada T și frecvența ν:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

În dezvoltările următoare vom folosi metoda simbolică de reprezentare în planul complex a mărimilor sinusoidale. Prin aceasta calculul cu funcții sinusoidale care au aceeași frecvență, deci aceeași pulsație, poate fi mult simplificat.

Pentru a înțelege în ce constă această metodă, vom lua un vector $\vec{V}$ de modul V_m care face unghiul φ cu axa Ox din planul complex (fig. 3.26). Proiecțiile lui pe cele două axe ale acestui plan sînt

$$a = V_m \cos\varphi, \quad b = \mathrm{i} V_m \sin\varphi.$$

Expresia

$$\underline{V} = V_m(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \qquad (3.22)$$

se numește reprezentarea trigonometrică a fazorului $\underline{V}$. Vom folosi convenția ca vectorii care se exprimă prin numere complexe să fie notați cu o bară dedesubt.

Prin reprezentarea unei mărimi complexe $\underline{V}$ printr-un vector în planul complex, fiecărei mărimi sinusoidale i se asociază deci cîte un vector (liber) în acest plan.

Din relațiile precedente rezultă

$$V_m = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ și } \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}, \qquad (3.23)$$

cu condiţia ca atunci cînd se stabileşte valoarea lui φ, se ia în consideraţie şi cadranul trigonometric în care se găseşte fazorul $\underline{V}$.

Deoarece în operaţiile care se fac cu funcţiile sinusoidale, pulsaţia ω are permanent aceeaşi valoare constantă, o astfel de funcţie sinusoidală este definită, dacă se cunosc două dintre mărimile a, b şi unghiul φ.

În conformitate cu relaţiile lui Euler,

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} \quad \text{şi} \quad \cos\varphi - i\sin\alpha = e^{-i\varphi}, \qquad (3.24)$$

putem exprima fazorul (3.22) prin relaţia exponenţială

$$\underline{V} = V_m\ e^{i\varphi},$$

care poartă numele de reprezentare simplificată complexă a fazorului $\underline{V}$.

În această expresie, mărimea $e^{i\varphi}$ arată că fazorul $\underline{V}$ este rotit în sensul trigonometric cu unghiul φ.

Exemplu. O mărime sinusoidală, exprimată prin

$$v = 4\sin(\omega t + 30°)$$

este reprezentată complex prin fazorul

$$\underline{V} = 4\ e^{i\,30°} = 4(\cos 30° + i\sin 30°) = 2\sqrt{3} + i2.$$

Invers, expresiei reprezentate complex prin

$$\underline{V} = -2 + i4$$

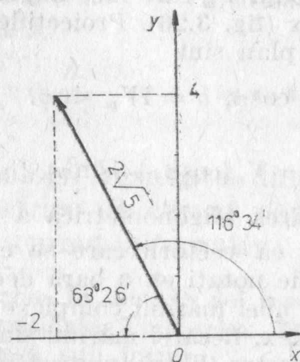


Fig. 3.27.

(fig. 3.27) îi corespunde funcţia sinusoidală a cărei amplitudine sau modulul fazorului este

$$V_m = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5},$$

iar unghiul făcut de fazor cu axa Ox se obţine din relaţia

$$\text{arc tg}\ \frac{4}{2} = 63°26'.$$

Ţinînd însă seama că fazorul se găseşte în cadranul II, unghiul calculat trigonometric este

$$\varphi = 180° - 63°26' = 116°34',$$

de unde

$$\underline{V} = -2 + i4 = 2\sqrt{5}\,(\cos 116°34' + i\sin 116°34') =$$

$$= 2\sqrt{5}\ e^{i\,116°34'}$$

$$v = 2\sqrt{5}\sin(\omega t + 116°34').$$

b. Operaţii algebrice cu fazori. *Adunarea fazorilor (exemplu).* Se dau mărimile sinusoidale:

$$v_1 = 2\sin(\omega t + 75°) \text{ şi } v_2 = 6\sin(\omega t + 25°),$$

ele fiind reprezentate trigonometric prin fazorii

$$\underline{V}_1 = 2\,(\cos 75° + i\sin 75°) \text{ şi } \underline{V}_2 = 6(\cos 25° + i\sin 25°).$$

Suma acestor fazori va fi egală cu fazorul

$$\underline{V} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 = 2(0{,}26 + i\,0{,}97) + 6(0{,}91 + i\,0{,}42) =$$

$$= 0{,}52 + 5{,}46 + i\,(1{,}94 + 2{,}52)$$

sau

$$\underline{V} = 5{,}98 + i\,4{,}46.$$

Acest fazor va reprezenta o funcţie sinusoidală cu amplitudinea

$$\sqrt{5{,}98^2 + 4{,}46^2} = 7{,}46$$

şi faza iniţială

$$\varphi = \text{arc tg}\frac{4{,}46}{5{,}98} = 36°43',$$

deci va corespunde funcţiei sinusoidale

$$v = 7{,}46\sin(\omega t + 36°43'),$$

reprezentată prin fazorul

$$\underline{V} = 7{,}46\ e^{i\,36°43'}.$$

Această operație este reprezentată grafic, complex în figura 3.28.

Înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere a fazorilor (exemplu). Se dau fazorii

$$\underline{V}_1 = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,20}\quad \underline{V}_2 = 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}45}.$$

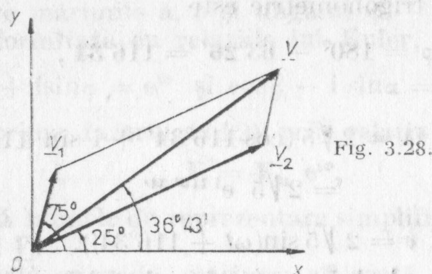


Fig. 3.28.

Produsul lor va fi fazorul

$$\underline{V} = \underline{V}_1 \cdot \underline{V}_2 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,20} \cdot 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,45} = 15\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(20+45)} = 15\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,65},$$

care are următoarea reprezentare trigonometrică :

$$\underline{V} = 15\ \ (\cos 65° + \mathrm{i}\sin 65°)$$

și corespunde funcției sinusoidale

$$v = 15\,\sin(\omega t + 65°).$$

În mod analog se procedează la împărțirea fazorilor.

Fie $\quad \underline{V}_1 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,20}$ și $\underline{V}_2 = 8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,60}$,

de unde

$$\underline{V} = \frac{\underline{V}_1}{\underline{V}_2} = \frac{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,20}}{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,60}} = 0{,}5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,40} = 0{,}5\,(\cos 40° - \mathrm{i}\sin 40°)$$

sau

$$v = 0{,}5\,\sin(\omega t - 40°).$$

Pentru ridicarea la putere a unui fazor, fie

$$\underline{V}_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,20}.$$

Ridicat la puterea a treia, de exemplu, se obține

$$\underline{V} = \underline{V}_1^3 = (2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,20})^3 = 8^{\mathrm{i}\,60} = 8(\cos 60° + \mathrm{i}\sin 60°)$$

sau

$$v = 8\,\sin(\omega t + 60°).$$

Derivarea fazorilor. Fie funcția sinusoidală reprezentată prin fazorul $v = V_m\,\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{V}$. Aplicînd funcției v regulile obișnuite de derivare, se obține

$$\frac{\mathrm{d}\underline{V}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \omega V_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega V_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega V_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega V_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \omega V_m\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \mathrm{i}\omega\underline{V}. \qquad (3.25)$$

Rezultă că derivării în raport cu timpul a unei mărimi sinusoidale îi corespunde, în domeniul reprezentărilor complexe, inmulțirea cu $\mathrm{i}\omega$. Deci în planul complex, derivării îi corespunde o rotire a fazorului cu $\frac{\pi}{2}$ în sens pozitiv, și mărirea lui de ω ori (fig. 3.29).

Se demonstrează în acelaşi mod, că derivatei de ordinul n a funcției sinusoidale îi corespunde expresia

$$\frac{\mathrm{d}^n v}{\mathrm{d}t^n} \Rightarrow (\mathrm{i}\omega)^n\,\underline{V}. \qquad (3.26)$$

Integrarea fazorilor. Fie aceeași funcție sinusoidală, reprezentată prin fazorul

$$v = V_m \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{V},$$

căreia ne propunem să-i calculăm integrala. Avem

$$\int \underline{V}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int v\,\mathrm{d}t = \int V_m \sin(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t = -\frac{V_m}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= \frac{V_m}{\omega}\sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{V_m}{\omega}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{V_m}{\omega}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \frac{V_m}{\omega}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} =$$

$$= -\frac{V_m}{\omega}\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}V_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\underline{V} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega}\underline{V}. \qquad (3.27)$$

Rezultă că integrării unui fazor îi corespunde în domeniul complex împărţirea fazorului cu ω şi rotirea sa în sens negativ cu $\frac{\pi}{2}$ (fig. 3.30).

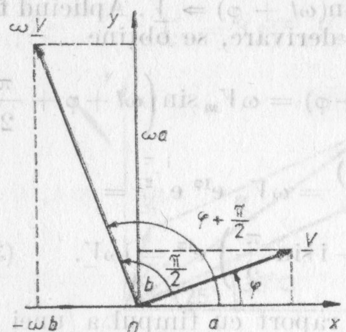


Fig. 3.29.

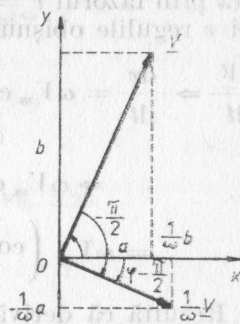


Fig. 3.30.

c. **Folosirea metodei simbolice pentru calcularea mărimilor caracteristice circuitelor electrice de curent alternativ.** În aplicaţii prezintă un interes deosebit circuitele formate exclusiv din rezistoare, bobine (care pot sau nu fi cuplate magnetic), condensatoare şi surse de tensiune. Pentru simplificare, circuitele de care ne vom ocupa în cele ce urmează nu vor conţine bobine cuplate magnetic. Tensiunile şi curenţii care apar în aceste circuite vor fi sinusoidale, de forma: $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ sau $e = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \varphi)$ şi $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$. În aceste expresii u, e, i sînt valorile instantanee, adică valorile tensiunii sau tensiunii electromotoare şi intensităţii curenţilor pentru o anumită valoare t a timpului; U_m, $\mathcal{E}_m$ şi I_m sînt la rîndul lor valorile maxime sau amplitudinile acestor mărimi. În electrotehnică se folosesc mărimile reprezentate prin simbolurile U, $\mathcal{E}$, I care se numesc tensiuni, tensiuni electromotoare şi, respectiv, intensităţi efective sau eficace. Pătratele acestor mărimi sînt egale respectiv cu media pătratelor tensiunii, tensiunii electromotoare sau intensităţii în timpul unei perioade. Din calcule rezultă

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}},\quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}},\quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Cu ajutorul ampermetrului şi voltmetrului construite pentru curenţi alternativi se măsoară tocmai aceste mărimi.

În circuitele descrise în continuare, frecvenţa, deci şi pulsaţia ω, va avea întotdeauna aceeaşi valoare constantă.

Fie un circuit (fig. 3.31) compus dintr-o bobină de inductanţă L, un rezistor de rezistenţă R şi un condensator

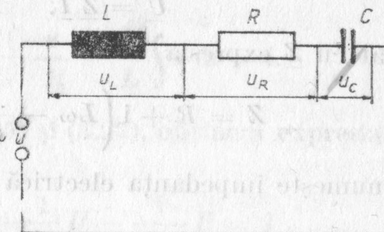


Fig. 3.31.

de capacitate C, montaţi în serie şi alimentaţi la o sursă cu tensiunea alternativă, $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$. Conform legii a doua a lui Kirchhoff,

$$u = \sum u_i = u_L + u_R + u_C \Rightarrow \underline{U}. \qquad (3.28)$$

Se ştie însă că

$$u_L = L\frac{di}{dt} \text{ şi } u_R = Ri,$$

de asemenea,

$$Q = Cu_C;\quad \frac{dQ}{dt} = i,\quad du_C = \frac{1}{C}dQ;\quad u_C = \frac{1}{C}\int dQ = \frac{1}{C}\int i dt.$$

Introducînd aceste valori în expresia (3.28), obţinem ecuaţia integro-diferenţială

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = u. \qquad (3.29)$$

Ţinînd seama de relaţiile (3.25) şi (3.27), se obţine

$$iL\omega \underline{I} + R\underline{I} + \frac{\underline{I}}{iC\omega} = \underline{U} \qquad (3.30)$$

sau

$$\left[R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]\underline{I} = \underline{U}$$

deci

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}. \tag{3.31}$$

Am notat cu $\underline{Z}$ expresia

$$\underline{Z} = R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right), \tag{3.32}$$

care se numește impedanța electrică complexă. Mărimea

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

se numește reactanță, $L\omega$ fiind reactanța inductivă, iar $\frac{1}{C\omega}$, reactanța capacitivă.

Să considerăm din nou un circuit (fig. 3.32) compus din inductanța L, rezistorul R și capacitatea C, montate în paralel și alimentate la o sursă de tensiune alternativă $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$.

Ecuația de echilibru a curenților pentru această schemă, obținută prin aplicarea legii întîi a lui Kirchhoff este

$$i_C + i_R + i_L = i \Rightarrow \underline{I}. \tag{3.33}$$

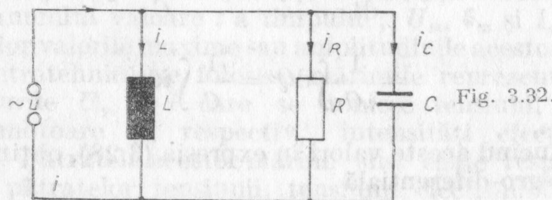


Fig. 3.32.

Avem însă

$$Q = Cu \text{ sau } i_C = \frac{dQ}{dt} = C\frac{du}{dt}, \text{ deci } i_C = C\frac{du}{dt},$$

$$i_R = \frac{u}{R},$$

iar

$$u = L\frac{di_L}{dt} \text{ sau } di_L = \frac{1}{L}u\,dt, \text{ deci } i_L = \frac{1}{L}\int u\,dt.$$

Introducînd valorile lui i_C, i_R, i_L în relația (3.33), se obține ecuația integro-diferențială

$$C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R} + \frac{1}{L}\int u\,dt = i. \tag{3.34}$$

Ținînd seama de (3.25) și (3.27), obținem expresia ei complexă

$$iC\omega\underline{U} + \frac{1}{R}\underline{U} - \frac{i}{L\omega}\underline{U} = \underline{I}$$

sau

$$\left[\frac{1}{R} + i\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right]\underline{U} = \underline{I}, \tag{3.35}$$

de unde

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{R} + i\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right), \tag{3.36}$$

deci

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}. \tag{3.37}$$

Expresia

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + i\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

se numește admitanță complexă și este egală cu suma inversilor termenilor ce intră în relația impedanței complexe (3.32). În relația (3.36) $\underline{Z}$ este impedanța complexă a sistemului din figura 3.32, compus dintr-o inductanță, un rezistor și o capacitate așezate în paralel, spre deosebire de valoarea lui $\underline{Z}$ exprimată în relația (3.32), care reprezintă impedanța acelorași elemente dispuse însă în serie (fig. 3.31).

Prin urmare, în conformitate cu (3.31) și (3.37), căderile de tensiune rezistive, inductive și capacitive se re-

prezintă complex sub forma generală

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}. \qquad (3.38)$$

Impedanța complexă poate avea în cazul cel mai simplu oricare dintre valorile

$$\underline{Z} = R,\ \underline{Z} = \mathrm{i}\omega L \ \text{ și } \ \underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega C}, \qquad (3.39)$$

după cum circuitul este constituit respectiv numai dintr-o rezistență, inductanță sau capacitate. În general însă, în cazurile care prezintă importanță în aplicații, impedanța este egală cu suma a două sau mai multe impedanțe (complexe) simple.

Din relația (3.38), scrisă sub forma simbolică, rezultă că în circuitele de curent alternativ impedanța înlocuiește simpla rezistență ohmică care intervine în circuitele de curent continuu.

În concluzie, utilizînd simbolurile complexe $\underline{I}$, $\underline{U}$ $\underline{\mathscr{E}}$, $\underline{Z}$ întreaga teorie a circuitelor și a rețelelor de circuite, bazate pe legile lui Ohm și Kirchhoff, stabilită pentru curenții staționari, se poate transcrie pentru curenții alternativi (cvasistaționari) — care corespund în mecanică, oscilațiilor forțate ale punctului material. De aceea, în problemele de curent alternativ se vor scrie

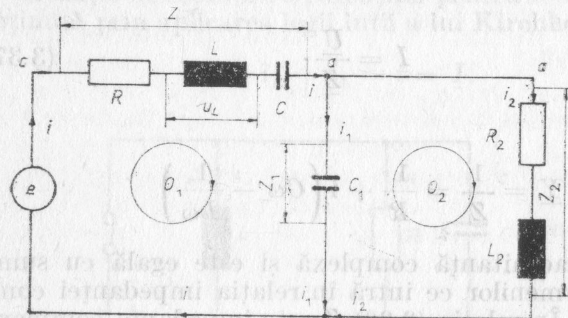


Fig. 3.33.

ecuațiile în formă complexă. Acestea se rezolvă apoi, după cum este cazul în raport cu complexele, necunoscute care pot fi $\underline{I}$, $\underline{U}$ $\underline{\mathscr{E}}$, sau $\underline{Z}$. În cele din urmă după ce s-au calculat aceste mărimi complexe, se pot determina valorile instantanee e, u sau i ale curentului.

Exemplu. Se cunosc următorii parametri: $R = 2\Omega$, $L = 6\cdot 10^{-3}$ H, $C = 10^{-3}$ F, $C_1 = 5\cdot 10^{-3}$ F, $R_2 = 4\Omega$,

$L_2 = 4\cdot 10^{-3}$ H, $\mathscr{E} = 40$V, $\omega = 2\pi 50\ \mathrm{s}^{-1}$, ai circuitelor reprezentate în figura 3.33. Să se determine valorile intensităților instantanee i, i_1, i_2, precum și tensiunea U_L la bornele inductanței L.

Vom nota cu $\underline{Z}$ impedanța complexă din ramura $(c\,a)$ a circuitului, cu $\underline{Z}_1$ aceea a ramurei $(a\,b)$ și cu $\underline{Z}_2$ aceea a ramurei($a\,d\,b$).

Se scrie pentru nodul (a) prima teoremă a lui Kirchhoff în formă complexă. Apoi se scrie, în continuare, tot în formă complexă, a doua teoremă a lui Kirchhoff, pentru ochiurile o_1 și o_2, folosindu-se sensurile de parcurs indicate în figură. Se obține

$$\underline{I} - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0,$$

$$\underline{Z}\,\underline{I} + \underline{Z}_1\underline{I}_1 = 0,$$

$$-\underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{I}_2 = 0.$$

Rezolvînd în raport cu $\underline{I}$, $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ acest sistem de trei ecuații liniare, se obține

$$\underline{I} = \frac{\mathscr{E}\,(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{Z}_1\underline{Z}_2}\ ;\ \underline{I}_1 = \frac{\mathscr{E}\,\underline{Z}_2}{\underline{Z}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{Z}_1\underline{Z}_2}\ ;$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\mathscr{E}\,\underline{Z}_1}{\underline{Z}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{Z}_1\underline{Z}_2}. \qquad (3.40)$$

Impedanțele complexe sînt date de relațiile

$$\underline{Z} = R + \mathrm{i}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right),\ \underline{Z}_1 = -\frac{\mathrm{i}}{C_1\omega},\ \underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{i}L_2\omega,$$

în care, introducînd datele problemei, se obține

$$\underline{Z} = 2 + \mathrm{i}\left(6\cdot 10^{-3}\cdot 2\pi\cdot 50 - \frac{1}{10^{-3}\cdot 2\pi\cdot 50}\right) = $$
$$= 2 - \mathrm{i}\,1{,}298,$$

$$\underline{Z}_1 = -\frac{\mathrm{i}}{5\cdot 10^{-3}\cdot 2\pi\cdot 50} = -\mathrm{i}\,0{,}637,$$

$$\underline{Z}_2 = 4 + \mathrm{i}4\cdot 10^{-3}\cdot 2\pi\cdot 50 = 4 + \mathrm{i}\,1{,}257.$$

Substituindu-se aceste valori ale impedanţelor în relaţiile (3.40), rezultă

$$\underline{I} = \frac{40(4 + i0,620)}{(2 - i1,298)(4 + i0,620) - i0,637(4 + i1,257)} =$$

$$= \frac{161,911\, e^{i8.811}}{11,598\, e^{-i34.085}} = 13,960\, e^{i42°54'},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{40(4 + i1,257)}{11,598\, e^{-i34.085}} = \frac{167,714\, e^{i17.445}}{11,598\, e^{-i34.085}} = 14,460\, e^{i51°32'},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{40(-i0,637)}{11,598\, e^{-i34.085}} = \frac{25,48\, e^{-i90}}{11,598\, e^{-i34.085}} = 2,197\, e^{-i55°55'}.$$

Tensiunea la bornele inductanţei L se obţine din relaţia

$$\underline{U}_L = \underline{I}\, Z_L$$

sau

$$\underline{U}_L = 13,960\, e^{i42°54'}\, 6 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 50\, e^{i90} = 26,314\, e^{i132°54'}$$

Tensiunea efectivă fiind

$$U_L = 26,314\text{V},$$

iar cea instantanee,

$$u_L = \sqrt{2} \cdot 26,314 \sin(2\pi \cdot 50\, t + 132°54').$$

Intensităţile efective ale curenţilor în cele trei ramuri ale circuitelor fiind respectiv

$$\underline{I} = 13,960\text{A},\ I_1 = 14,460\ \text{A},\ I_2 = 2,197\ \text{A},$$

iar valorile instantanee ale acestor intensităţi se obţin din relaţiile

$$i = \sqrt{2}\, 13,960 \sin(2\pi\, 50t + 42°54'),$$

$$i_1 = \sqrt{2}\, 14,460 \sin(2\pi\, 50t + 51°32'),$$

$$i_2 = \sqrt{2}\, 2,197 \sin(2\pi 50t - 55°55').$$

Pentru orice valoare a lui t, intensităţile instantanee trebuie să îndeplinească condiţia

$$i - i_1 - i_2 = 0.$$

Iată o verificare pentru t egal cu zero sau număr întreg :

$$i_0 - i_{01} - i_{02} = \sqrt{2}\,(9,503 - 11,322 + 1,819) = 0.$$

Capitolul 4. EXEMPLE DE MODELARE IDEALĂ

> „Omul de ştiinţă nu trebuie să uite că ipoteza trebuie considerată numai ca mijloc, niciodată ca scop".
>
> *T. HUXLEY*

Folosirea metodei modelării în fizică se face respectînd toate datele ştiinţifice, fiind absolut necesar să ştim ce avem de modelat şi pînă la ce limite de similitudine sau analogie se poate merge, pentru a asigura modelului semnificaţia fizică cît mai apropiată de original. În general construcţia unui model se bazează pe o aşa-zisă „simplificare raţională", adică din totalitatea de variabile sau de parametri, se aleg numai cei esenţiali şi care se includ în modelul generalizat. În acelaşi timp, trebuie precizate elementele ce se pun în corespondenţă, o dată cu neglijarea intenţionată a anumitor amănunte nesemnificative.

O largă aplicare în domeniul fizicii a căpătat modelarea ideală, care se caracterizează printr-un mare grad de generalitate, în sensul că cu ajutorul ei pot fi descrise fenomene analoage, indiferent de forma de mişcare a materiei care se manifestă în ele. În acelaşi timp, modelarea ideală poate fi folosită cu mult succes pentru descrierea unui concept, a unei idei sau teorii, ori a unui sistem de concepte sau idei.

4.1. Modelele de gaze

Vom descrie mai întîi modelul gazului perfect, imaginat de James Clark Maxwell, pe baza căruia a fost elaborată teoria cinetică-moleculară a gazelor. Conform acestui model, un gaz este format din molecule. Aceste molecule sînt mici sfere perfect elastice, ale căror dimensiuni pot fi considerate neglijabile în raport cu distanţele dintre ele. Moleculele din interiorul gazului se găsesc într-o stare de mişcare dezordonată, nici o direcţie de mişcare nefiind preferată faţă de alte direcţii. Distanţele dintre molecule fiind

foarte mari în raport cu dimensiunile moleculelor, asupra moleculelor nu acționează forțele de coeziune, singurele forțe care acționează asupra moleculelor fiind acelea ce iau naștere în momentul ciocnirii elastice dintre ele sau de pereții vasului. Din această cauză, traiectoria moleculelor dintre două ciocniri este un segment de dreaptă, iar traiectoria în ansamblul ei este o linie frîntă. Mărimea segmentului de dreaptă care formează traiectoria moleculei între două ciocniri se numește drumul liber al moleculei între două ciocniri. Media aritmetică a drumurilor libere ale tuturor moleculelor conținute într-o masă de gaz se numește drumul liber mediu al moleculelor acestui gaz.

Acest model s-a dovedit foarte fecund, Maxwell și după el Boltzmann și alții, folosind principiile mecanicii și legile teoriei probabilităților, au putut deduce legile gazelor perfecte. Pentru a se evita limitarea acestui model, pe lingă mișcarea de translație a moleculelor s-a atribuit moleculelor și o mișcare de rotație, în jurul unei axe a lor și chiar mișcări ale atomilor în interiorul moleculei.

Experiența arată că gazele reale nu se supun decît aproximativ legilor gazelor perfecte. Abaterile constante sînt datorate următoarelor două cauze:

Prima cauză de abateri este datorată faptului că moleculele nu sînt punctuale și că au un volum propriu, iar atunci cînd presiunea crește, volumul gazului nu poate tinde spre zero, cum ar urma dacă gazul s-ar supune legilor gazelor perfecte.

A doua cauză de abateri de la legile gazelor perfecte este datorată existenței interacțiunii dintre molecule. Cînd presiunea crește, distanța medie dintre molecule scade, astfel încît moleculele, apropiindu-se unele de altele încep să intervină forțe de coeziune. Atracția dintre molecule joacă in acest caz rolul unei presiuni suplimentare, numită *presiune internă*.

Pentru eliminarea acestor neajunsuri a fost propus modelul de gaz Van der Waals, în care spațiul în care se mișcă moleculele nu este egal cu volumul V al vasului în care se găsește gazul, ci cu diferența $V - b'$ dintre volumul V al gazului și un volum b' care depinde de suma volumelor moleculelor. Cum între molecule se exercită și forțe de coeziune, reprezentate printr-o presiune internă p', ecuația de stare a gazelor perfecte,

$$pV = RT,$$

a fost corectată sub forma

$$(p + p')(V - b') = RT.$$

O analiză mai amănunțită, bazată pe teoria cinetico-moleculară a gazelor arată că p' este invers proporțional cu pătratul volumului molecular V și b' este egal cu $4b$ și poartă numele de covolum, b fiind suma volumelor tuturor moleculelor dintr-un mol de gaz.

În cele din urmă, ecuația gazelor reale pentru un mol de gaz, numită și ecuația Van der Waals, va fi

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - 4b) = RT,$$

a și b fiind constante ce depind de natura gazului.

Domeniul de aplicație al ecuației Van der Waals este mai întins decît al ecuației de stare a gazelor perfecte; se aplică în special în domeniul temperaturilor și presiunilor apropiate de punctul de lichefiere al gazelor, unde ecuația de stare a gazelor perfecte nu dă rezultate. La rîndul său acest model nu constituie totuși decît o altă aproximație, care se apropie mai mult de realitatea faptelor experimentale.

4.2. Energia

Dacă privim mișcarea în sensul cel mai general și anume, acela de transformare sau schimbare de stare a unui corp sau sistem fizic, măsura acestei mișcări poartă numele de energie. Energia unui sistem se măsoară în unități de lucru mecanic. Lucrul mecanic este egal cu produsul scalar dintre forța $\vec{F}$ (presupusă constantă) și deplasare $\vec{l}$ (fig. 4.1)

$$W = \vec{F} \cdot \vec{l} = Fl \cos\alpha,$$

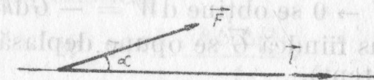


Fig. 4.1.

în care α este unghiul făcut de direcția forței cu direcția deplasării (atunci cînd corpul asupra căruia acționează forța $\vec{F}$ este supus la legături). În cele ce urmează, vom privi deci lucrul mecanic ca un mijloc de transfer al energiei de la un corp la altul, de la un sistem la altul, prin inter-

mediul unei forțe. Energia (de fapt variația ei) va avea întotdeauna dimensiunile lucrului mecanic și anume a produsului dintre forță și lungime

$$|\Delta W| \Leftrightarrow |\vec{F} \cdot \vec{l}| = ML^2T^{-2}.$$

Ca și lucrul mecanic energia este o mărime scalară.

În mecanică, energia se intîlnește mai ales sub două forme principale: energie potențială și energie cinetică.

4.2.1. Energia potențială. Exemple

Variația energiei potențiale a unui corp sub acțiunea greutății. Se consideră un corp asimilat cu un punct material, aflat sub acțiunea forței gravitaționale; așadar avem de a face de fapt cu sistemul corp-Pămînt. Greutatea corpului $\vec{G}$ este o forță verticală, îndreptată în jos, pe care o vom considera constantă pentru variații de înălțime nu prea mari (fig. 4.2). Dacă vom deplasa corpul în cîmpul gravitațional după o traiectorie AB, lucrul mecanic făcut de corp pentru deplasarea elementară MN va fi

$$dW = \vec{G} \cdot \vec{MN} = G \cdot MN \cdot \cos\alpha.$$

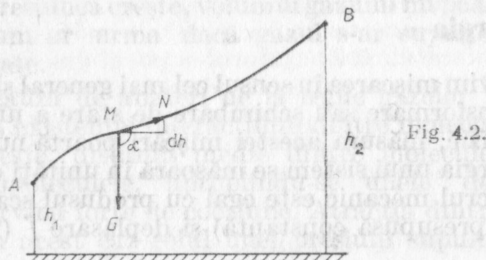


Fig. 4.2.

Cînd $MN \to 0$ se obține $dW = -Gdh$, în care s-a luat semnul minus fiindcă $\vec{G}$ se opune deplasării (lucrul mecanic este rezistent).

Lucrul mecanic total va fi

$$W = -\int_{h_1}^{h_2} Gdh = -G(h_2 - h_1) = -G\Delta h.$$

Mărimea cu semn schimbat a acestei expresii,

$$W_p = G\,\Delta h,$$

poartă numele de variație a energiei potențiale. Această variație este egală cu lucrul mecanic ce-l poate face corpul dacă este lăsat să cadă de la înălțimea h_2 la h_1. De aceea se spune ca prin deplasarea corpului de la înălțimea h_1 la h_2, cu $h_2 > h_1$, energia potențială a corpului a crescut cu ΔW_p. În ipoteza absenței frecărilor, această variație nu depinde de drumul parcurs de corp, ci numai de diferența de înălțime.

Variația energiei potențiale a unei bare supuse la întindere. Dacă asupra unei bare se acționează cu o forță $\vec{F}$, în limita elasticității, în conformitate cu legea lui Hooke, bara se va alungi cu

$$x = \frac{1}{E}\frac{l}{S}F,$$

în care l și S sînt lungimea și respectiv aria secțiunii drepte a barei, iar E un coeficient ce depinde de natura materialului din care este făcută bara, numit modul de elasticitate sau modulul lui Young. Alungirea este deci funcție de mărimea forței $\vec{F}$, iar lucrul mecanic făcut de forța elastică, care se opune alungirii, cînd bara este alungită cu Δl este

$$W = \int_0^{\Delta l} -F\mathrm{d}x = \int_0^{\Delta l} -\frac{ES}{l}x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{ES\,\Delta l^2}{l}.$$

Am notat cu x alungirea variabilă, în funcție de forța $\vec{F}$, și s-a introdus semnul minus fiindcă forța elastică ce se dezvoltă în bară în timpul deformației se opune alungirii. Schimbînd semnul, obținem expresia energiei potențiale care caracterizează bara, adică lucrul mecanic pe care-l poate executa bara asupra mediului exterior, după ce a suferit deformarea elastică,

$$W_p = \frac{1}{2}\frac{ES\,\Delta l^2}{l}.$$

Vom numi energie potențială, energia dependentă de poziția corpurilor care interacționează între ele prin forțe. Din cele arătate mai sus rezultă că pentru a afla energia potențială a unui sistem de două sau mai multe corpuri care interacționează între ele prin forțe, calculăm suma

lucrurilor mecanice făcute de forțele interioare (rezistente) ale sistemului, necesare pentru a-l aduce dintr-o poziție (reper) de energie potențială nulă (sau socotită convențional nulă) în poziția considerată și apoi îi schimbăm semnul. Întrucît pentru calcularea energiei potențiale a corpului este necesară alegerea unei poziții reper, rezultă că în mecanica nerelativistă, nu putem calcula valoarea absolută a energiei potențiale, ci numai variația ei, și aceasta doar cu aproximația unei constante aditive arbitrare.

4.2.2. Energia cinetică. Teoremă

Considerăm un corp asimilat cu un punct material, care are viteza $\vec{v}_1$ cînd începe să acționeze asupra lui o forță $\vec{F}$. Presupunem că în timpul $\Delta t = t_2 - t_1$, corpul a parcurs distanța $\Delta s = s_2 - s_1$, viteza sa ajungînd la valoarea $\vec{v}_2$. Lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ va fi

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} m\vec{a}\,\mathrm{d}\vec{s} = m\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,\vec{v}\,\mathrm{d}t =$$

$$= m\int_{v_1}^{v_2} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{v} = m\int_{v_1}^{v_2} \frac{\mathrm{d}\vec{v}^2}{2} =$$

$$= \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta W_c. \qquad (4.1)$$

Expresia $\frac{mv^2}{2} = W_c$ poartă numele de energie cinetică a punctului material de masă m avînd viteza v. Deci, dacă o forță acționează asupra unui punct material în mișcare, lucrul mecanic făcut de forță este egal cu variația energiei cinetice a corpului.

Ca și energia potențială, energia cinetică este o mărime căreia nu-i putem măsura decît variația ei, deci valoarea ei relativă față de un sistem de referință.

4.2.3. Conservarea energiei

Se constată că dacă într-un sistem închis (asupra căruia nu acționează forțe exterioare) se neglijează acțiunea forțelor de frecare, suma variațiilor energiei potențiale și

energiei cinetice a sistemului este constantă. Acesta este enunțul teoremei conservării energiei mecanice. Să evidențiem această teoremă printr-un exemplu. Considerăm o mică sferă de masă m (asimilată cu un punct material), fixată cu ajutorul a două resorturi identice, presupuse lipsite de masă și de frecare, astfel încît asupra sferei acționează numai forțele elastice dezvoltate de resorturi. Dispozitivul reprezintă modelul a ceea ce se numește în fizică un oscilator armonic liniar (fig. 4.3). Se scoate sfera

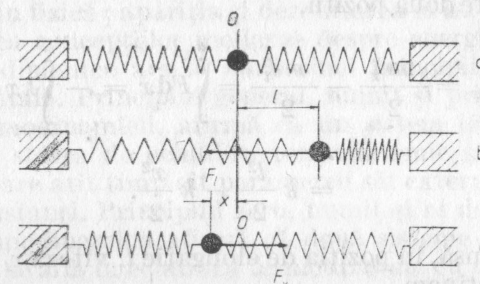


Fig. 4.3.

din poziția de echilibru dîndu-i o deplasare l, lăsînd-o apoi să se miște sub acțiunea resorturilor.

Asupra sferei acționează în orice moment o forță elastică $F = -kx$ proporțională cu elongația x și îndreptată în sens contrar cu ea. Pentru a calcula variația energiei potențiale, vom calcula mai întîi lucrul mecanic făcut de această forță elastică la deplasarea sferei din poziția reper, de elongație zero, pînă în poziția de elongație x și apoi îi vom schimba semnul,

$$-\Delta W_{p_x} = \int_0^x F\mathrm{d}x = -\int_0^x kx\,\mathrm{d}x = -k\frac{x^2}{2}.$$

Cum energia este definită pînă la o constantă aditivă arbitrară, este suficient să se convină a se lua $W_{p_x}(0) = 0$, ceea ce permite ca în locul variației energiei potențiale să se scrie energia potențială sub forma

$$W_{p_x} = k\frac{x^2}{2}.$$

Variaţia energiei potenţiale în timpul în care sfera este adusă pînă în poziţia de elongaţie maximă l este

$$W_p = k\frac{l^2}{2}.$$

Pe de altă parte, lucrul mecanic făcut de forţele elastice cînd sfera trece din poziţia de elongaţie maximă l în poziţia de elongaţie x este egal cu variaţia energiei cinetice între aceste două poziţii,

$$\Delta W_{c_x} = \frac{mv_x^2}{2} - \frac{mv_l^2}{2} = \int_l^x F\mathrm{d}x = -\int_l^x kx\,\mathrm{d}x =$$

$$= k\frac{l^2}{2} - k\frac{x^2}{2}.$$

Deoarece însă, în poziţia de elongaţie l, viteza v_l este egală cu zero, obţinem

$$\Delta W_{c_x} = \frac{mv_x^2}{2} = k\frac{l^2}{2} - k\frac{x^2}{2}.$$

Într-o poziţie de elongaţie x sfera are atît energie potenţială, cît şi energie cinetică, astfel încît suma variaţiilor energiei cinetice şi potenţiale, într-o poziţie oarecare, va fi egală cu variaţia energiei totale

$$\Delta W = \Delta W_{p_x} + \Delta W_{c_x} = \frac{kx^2}{2} + \frac{kl^2}{2} - \frac{kx^2}{2} =$$

$$= k\frac{l^2}{2} = k\frac{A^2}{2},$$

l fiind elongaţia maximă, adică amplitudinea A a mişcării oscilatorii armonice.

Faptul că energia totală este o funcţie de viteze şi de poziţie, $W = W(v_x, v_y, v_z, x, y, z)$, rezultă că în limitele mecanicii newtoniene, teorema conservării energiei se poate formula astfel: într-un sistem izolat de corpuri, suma energiilor cinetice W_{c_i} şi potenţiale W_{p_i} este constantă,

$$W_{c_i}(v_x, v_y, v_z) + W_p(x, y, z) = \text{const.}$$

Principiul conservării energiei mecanice, astfel cum a fost arătat mai sus, acţionează numai în cazul ideal, al sistemelor fără frecări. Se ştie însă că sisteme fără frecare nu există în natură. Lucrul mecanic făcut de forţele de frecare se transformă în căldură, clădura fiind astfel şi ea un alt mod de transmitere a energiei. Transformările termice ale sistemelor şi fenomenelor mecanice ce le însoţesc formează obiectul termodinamicii.

Termodinamica este unul dintre cele mai importante capitole din fizică; apariţia şi dezvoltarea ei au dus la fundamentarea concepţiilor moderne despre energie.

Termodinamica are la bază cinci principii de natură experimentală. Principiul general, numit şi primul postulat al termodinamicii, afirmă că un sistem izolat evoluează spre starea de echilibru termodinamic şi rămîne în această stare atît timp cît parametrii săi externi sînt menţinuţi constanţi. Principiul zero, numit şi al doilea postulat al termodinamicii afirmă că două sisteme termodinamice care se află în echilibru termodinamic cu un al treilea sînt în echilibru termodinamic sau, mai general, tranzitivitatea este o proprietate generală a echilibrului termodinamic. Principiul întîi al termodinamicii se postulează, din el rezultînd ca un caz particular conservarea energiei. Principiul al doilea, numit şi principiul entropiei conţine două afirmaţii independente: principiul al doilea pentru procesele reversibile şi, separat, pentru procesele ireversibile. În sfîrşit, principiul al treilea al termodinamicii postulează faptul că entropia unei substanţe pure condensate se anulează la zero absolut.

În majoritatea cazurilor, în literatura didactică, se consideră principiul general şi principiul zero al termodinamicii ca fiind postulatele termodinamicii, iar ca principii propriu-zise, principiile I, al II-lea şi al III-lea. Marele fizico-chimist german Walter Nernst — laureat al premiului Nobel pentru chimie pe anul 1920 — justifica în glumă, bineînţeles, astfel imposibilitatea existenţei unui al patrulea principiu al termodinamicii: „Enunţarea primului principiu este legată de activitatea a trei savanţi (Mayer, Joule, Helmholtz); formularea celui de-al doilea principiu se bazează pe cercetările a doi savanţi (Clausius şi Thomson); cel de-al treilea a fost stabilit de o singură persoană — de mine. Prin urmare ...".

Principiul întîi al termodinamicii este pus în evidenţă, mai ales de faptul că totdeauna cînd într-un sistem

au loc „pierderi” de energie mecanică, din cauza lucrului mecanic făcut de forțele de frecare ce se produc în interiorul sistemului, se dezvoltă căldură.

Pe baza generalizării unui număr foarte mare de experiențe, principiul întîi al termodinamicii afirmă, indiferent de dispozitivele folosite, echivalența dintre căldură și lucru mecanic. Echivalența dintre lucru mecanic și căldură se postulează astfel : căldura comunicată unui sistem termodinamic servește parțial la variația energiei interne a sistemului și restul la efectuarea de lucru mecanic. Raportul dintre lucrul mecanic și căldura respectivă este întotdeauna același.

Din această cauză, se poate folosi pentru măsurarea căldurii aceeași unitate de măsură ca și pentru lucrul mecanic, care în S.I. este joulul. În acest fel,

$$W \Leftrightarrow Q. \qquad (4.2)$$

Pentru studiul proceselor termodinamice, în care sistemul schimbă căldură și lucru mecanic cu mediul exterior, este necesară stabilirea unei convenții asupra semnelor mărimilor menționate, întrucît transferul respectiv se poate face în ambele sensuri : de la sistem spre exterior sau invers. Deși poate fi adoptat orice fel de convenție a semnelor, avînd în vedere însă că termodinamica s-a născut din nevoile practicii, vom adopta convenția care scoate în evidență latura practică a fenomenelor. În cadrul acestei convenții, se dau semne pozitive pentru căldura primită de sistem și pentru lucrul mecanic efectuat de sistem asupra mediului înconjurător și invers, semne negative situațiilor contrare.

Considerînd o convenție de semn prin care căldura și lucrul mecanic primite de un sistem sînt considerate pozitive, se poate formula principiul întîi al termodinamicii, astfel : energia unui sistem termodinamic se poate modifica fie efectuînd lucru mecanic asupra sistemului, fie transferînd căldură sistemului,

$$\Delta U = W + \Delta Q.$$

În acest fel „echivalența” dintre căldură și lucrul mecanic este conținută în relația de mai sus.

În cazul general, cînd sistemul schimbă căldură și lucru mecanic cu mediul exterior, iar după o serie de transformări trece de la o stare inițială la o stare finală, diferită de cea inițială, excesul de căldură care nu apare sub formă

de lucru mecanic nu se pierde, ci conduce la variația energiei sale interne. Această energie internă este energia (cinetică, potențială etc.) transferată moleculelor din care este constituit sistemul.

Deci, în forma sa generală, principiul I al termodinamicii se scrie

$$Q = \Delta U + W, \qquad (4.3)$$

iar sub formă diferențială,

$$dQ = dU + dW. \qquad (4.4)$$

Energia internă U este funcție de parametrii de stare ai sistemului, variația ΔU depinzînd numai de starea inițială și de cea finală a sistemului.

Relațiile (4.3) și (4.4) exprimă forma generală a principiului conservării energiei și anume : nu se poate produce energie din nimic, iar acolo unde „dispare” o cantitate de energie, într-o formă oarecare, este regăsită sub o altă formă, în cantitate egală. Principiul I al termodinamicii infirmă posibilitatea creării unui *perpetuum mobile* de speță I, adică a unei mașini care să producă lucru mecanic neconsumînd nimic. Într-adevăr, dacă în relația (4.3) $Q = 0$, urmează că lucrul mecanic ce îl poate produce sistemul se face prin consumarea energiei sale interne. Această energie fiind limitată, după un timp mai mare sau mai mic de funcționare, mașina respectivă se va opri.

Principiul întîi nu arată însă sensul în care poate evolua un sistem. Principiul al doilea al termodinamicii arată acest sens, prin introducerea altei mărimi (care este funcție de parametrii de stare ai sistemului), numită entropie și care se notează cu S; principiul al doilea afirmă că orice sistem izolat, real (în care transformările sînt ireversibile) evoluează spontan, în sensul creșterii entropiei. Creșterea entropiei este interpretată drept creșterea dezordinii elementelor sau particulelor din care este format sistemul.

Principiul al treilea al termodinamicii stabilește că entropia tuturor sistemelor termodinamice în echilibru stabil sau nestabil tinde spre zero la temperatura de zero absolut.

Importanța principiului conservării energiei decurge din universalitatea sa ; el este confirmat în toate domeniile fizicii, atît la scară macroscopică cît și la scară microscopică și se aplică în toate științele naturii. Folosirea acestui principiu devine un mijloc foarte util și eficient de investigație, atît în cercetare, cît și în studiul fizicii.

Un astfel de aspect îl întîlnim, de exemplu în electricitate, în expresia legii (experimentale) a lui Joule, care arată că la trecerea unui curent de intensitate constantă I printr-un rezistor de rezistență R, într-un timp t, se transmite în exterior căldura

$$Q = RI^2t. \tag{4.5}$$

În efectul Joule, energia mecanică a electronilor liberi — numiți și electroni de conducție — puși în mișcare de tensiunea electromotoare, se transformă în căldură, din cauza rezistenței ce o opun mișcării lor restul atomilor ce formează rețeaua cristalină a metalului, printre care se deplasează electronii.

Ținînd seama de echivalența dintre lucru mecanic și căldură, formula (4.5) exprimă și energia curentului electric,

$$W = RI^2\,t. \tag{4.6}$$

În conformitate cu legea lui Ohm (notînd cu U tensiunea aplicată rezistenței R),

$$I = \frac{U}{R},$$

din (4.6), pentru energia curentului care circulă într-un circuit, obținem relația

$$W = U\,I\,t. \tag{4.7}$$

Dacă ținem seama că

$$I = \frac{Q}{t}, \tag{4.8}$$

unde Q este cantitatea de electricitate transportată de curent în timpul t, din (4.7) și (4.8) în cazul unui curent continuu și cu intensitate constantă, obținem energia disipată pe rezistența R,

$$W = UQ.$$

Evident că în cazul unui circuit închis, în care tensiunea electromotoare $\mathscr{E}$ este tensiunea de-a lungul întregului circuit,

$$W = \mathscr{E}Q,$$

iar pentru un curent variabil

$$\mathrm{d}W = U\,\mathrm{d}Q \text{ respectiv } \mathrm{d}W = \mathscr{E}\mathrm{d}Q. \tag{4.9}$$

În cele ce urmează vom folosi principiul conservării energiei pentru a calcula energia unui condensator încărcat cu sarcina electrică Q.

4.2.4. Energia unui condensator

Vom începe prin a calcula lucrul mecanic efectuat de forța de interacțiune dintre două corpuri considerate punctiforme, unul încărcat cu sarcina $q = +1$ și care se deplasează pe traiectoria MA și altul încărcat cu sarcina Q și aflat în punctul O (fig. 4.4). Între cele două corpuri încărcate electric se va exercita forța coulombiană

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2},$$

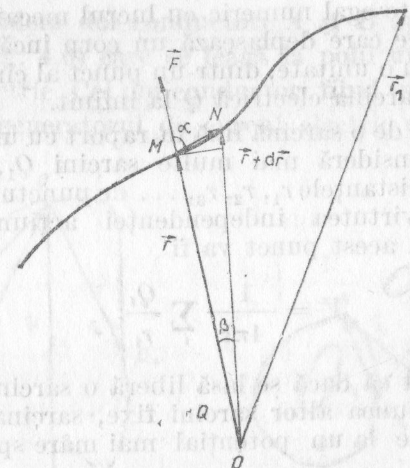


Fig. 4.4

r fiind distanța din punctul O la unitatea de sarcină, iar ε permitivitatea mediului. Lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ pentru a deplasa corpul încărcat cu sarcina $q = +1$ pe distanța elementară $\overline{MN} = \mathrm{d}\vec{l}$ este

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \overline{MN} = F \cdot MN \cos\alpha.$$

La limită, cînd $\beta \to 0$, $MN \cos\alpha \to dr$, de unde $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ și deci

$$W = \int_r^{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_r^{r_1} \frac{Q}{r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_r^{r_1} d\left(\frac{Q}{r}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q}{r} - \frac{Q}{r_1}\right).$$

Observăm că lucrul mecanic nu depinde de forma drumului străbătut de corpul încărcat cu unitatea de sarcină, ci numai de distanțele r și r_1.

Dacă $r_1 \to +\infty$, mărimea $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r} = V$ poartă numele de potențialul cîmpului produs de sarcina Q într-un punct aflat la distanța r. Potențialul electric este o mărime scalară. El este egal numeric cu lucrul mecanic făcut de forțele electrice care deplasează un corp încărcat cu sarcina q, egală cu o unitate, dintr-un punct al cîmpului electric creat de sarcina electrică Q la infinit.

Dacă în loc de o sarcină fixă în raport cu un referențial inerțial, se consideră mai multe sarcini $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, ce se găsesc la distanțele $r_1, r_2, r_3, \ldots$ de punctul considerat, atunci, în virtutea independenței acțiunii forțelor potențialul din acest punct va fi

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_i \frac{Q_i}{r_i}. \qquad (4.10)$$

De observat că dacă se lasă liberă o sarcină electrică, aflată sub acțiunea altor sarcini fixe, sarcina respectivă se va deplasa de la un potențial mai mare spre unul mai mic.

Vom considera un corp pe care sînt distribuite sarcinile electrice $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ (fig. 4.5). Potențialul într-un punct O al corpului va fi dat de relația (4.10). Dacă acest corp este bun conductor electric (în interiorul căruia sarcinile electrice — electronii — se pot mișca liber), din cauza forțelor de respingere dintre sarcini, acestea se vor distribui pe suprafața conductorului, în așa fel încît toate punctele conductorului, deci și cele de pe suprafața sa, vor avea același potențial.

Dacă diferite puncte ale conductorului ar avea potențiale diferite, sarcinile din punctele cu potențial mai mare se vor deplasa în punctele cu potențial mai mic, pînă se va ajunge la o stare de echilibru stabil, în care toate punctele conductorului vor avea același potențial.

De aceea vom putea spune că potențialul unui conductor încărcat electric este egal cu lucrul mecanic necesar pentru a aduce unitatea de sarcină electrică pozitivă de la infinit, în orice punct de pe suprafața sa. Dacă sarcina electrică se aduce mai întîi în interiorul corpului, ea ajunge spontan la suprafață.

Dacă se dau doi conductori încărcați cu electricitate la potențialele V_1 și V_2, lucrul necesar pentru a trece o sarcină Q de pe un conductor pe altul este evident egal cu

$$W = Q(V_1 - V_2). \qquad (4.11)$$

Vom considera doi conductori A și B apropiați unul de celălalt (fig. 4.6) care se leagă la polii unui generator de curent electric. Cei doi conductori fiind inițial neîncărcați electric, generatorul de curent electric va transporta

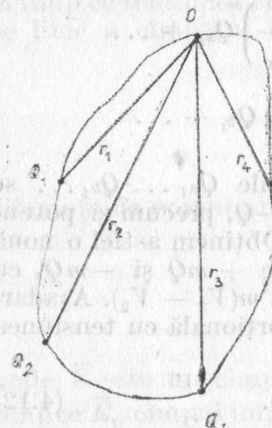


Fig. 4.5.

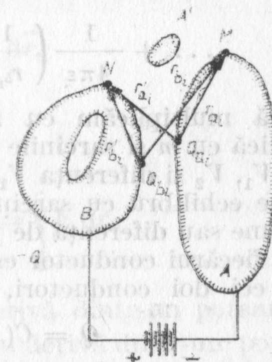


Fig. 4.6.

de la unul la altul o sarcină Q de electricitate, încît după un timp oarecare (foarte scurt), unul dintre conductori va avea o sarcină $+Q$, iar celălalt $-Q$. Potențialul conducto-

rului A într-un punct oarecare M al său (egal cu potențialul conductorului), conform cu (4.10) este

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_{a_1}}{r_{a_1}} + \frac{Q_{a_2}}{r_{a_2}} + \ldots + \frac{Q_{a_i}}{r_{a_i}} + \ldots + \frac{Q_{b_1}}{r_{b_1}} + \frac{Q_{b_2}}{r_{b_2}} + \ldots + \frac{Q_{b_i}}{r_{b_i}} + \ldots\right);$$

$Q_{a_1}, Q_{a_2} \ldots$ și $Q_{b_1}, Q_{b_2} \ldots$ sînt sarcinile elementare ale suprafețelor conductorilor A și, respectiv, B, iar $r_{a_1}, r_{a_2}, \ldots, r_{b_1}, r_{b_2} \ldots$, distanțele dintre punctul M și sarcinile elementare $Q_{a_i} \ldots Q_{b_i}$.

Tot astfel, potențialul conductorului B într-un punct N este

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_{a_1}}{r'_{a_1}} + \frac{Q_{a_2}}{r'_{a_2}} + \ldots + \frac{Q_{a_i}}{r'_{a_i}} + \ldots + \frac{Q_{b_1}}{r'_{b_1}} + \frac{Q_{b_2}}{r'_{b_2}} + \ldots + \frac{Q_{b_i}}{r'_{b_i}} + \ldots\right),$$

în care $r'_{a_1}, r'_{a_2}, \ldots, r'_{b_1}, r'_{b_2} \ldots$ sînt distanțele dintre punctul N și aceleași sarcini elementare. Deci

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_{a_1}} - \frac{1}{r'_{a_1}}\right)Q_{a_1} + \ldots + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_{b_1}} - \frac{1}{r'_{b_1}}\right)Q_{b_1} + \ldots$$

Dacă multiplicăm cu m sarcinile $Q_{a_i} \ldots Q_{b_i} \ldots$ se multiplică cu m și sarcinile $+Q$ și $-Q$, precum și potențialele V_1, V_2 și diferența $V_1 - V_2$. Obținem astfel o nouă stare de echilibru cu sarcinile totale $+mQ$ și $-mQ$, cu o tensiune sau diferență de potențial $m(V_1 - V_2)$. Așadar, sarcina fiecărui conductor este proporțională cu tensiunea dintre cei doi conductori,

$$Q = C(V_1 - V_2). \quad (4.12)$$

Acest sistem de doi conductori apropiați este forma generală a unui condensator, iar coeficientul de proporționalitate C se numește capacitatea condensatorului și depinde de forma conductorilor, de poziția lor relativă și de permitivitatea mediului dintre armături.

Dacă se transferă o sarcină dQ de pe conductorul B pe conductorul A, notînd cu U tensiunea electromotoare a generatorului de curent electric și neglijînd pierderile prin efectul Joule, rezultă

$$dW = U dQ.$$

După ce am întrerupt legăturile dintre conductorii A și B cu generatorul de curent electric, trecem mecanic aceeași sarcină electrică dQ, înapoi de pe A pe B, cu ajutorul unui conductor A', pe care îl atingem de A și pe care îl transportăm și îl descărcăm pe B, atingîndu-l de interiorul acestuia. Lucrul efectuat de acest transport mecanic a sarcinii dQ de pe A pe B este

$$dW = (V_1 - V_2)\, dQ.$$

În virtutea principiului conservării energiei, trebuie să avem

$$U dQ = (V_1 - V_2)\, dQ, \text{ de unde } U = V_1 - V_2.$$

În realitate, deși tensiunea electromotoare este egală numeric cu diferența de potențial electric dintre conductorii A și B, ele sînt în general mărimi diferite. Și anume, în timp ce tensiunea electromotoare este egală cu integrala de linie a cîmpului imprimat,

$$U = \int_A^B \vec{E}_i\, d\vec{r},$$

diferența de potențial se scrie

$$V_B - V_A = \int_B^A \vec{E}\, d\vec{r},$$

unde $\vec{E}$ este un cîmp care derivă dintr-un potențial, în timp ce $\vec{E}_i$, cîmpul imprimat, nu derivă dintr-un potențial.

Să presupunem că în cazul condensatorului $A - B$ mai sus considerat, facem să varieze tensiunea electromotoare a generatorului, treptat de la zero la U și sarcina electrică de la zero la Q. Vom avea, în fiecare moment,

$$Q = C(V_1 - V_2) = CU.$$

Cînd U crește cu dU, sarcina crește cu

$$dQ = C\,dU.$$

Energia dielectricului dintre armături este

$$W = \int_0^Q U\,dQ = C\int_0^U U\,dU = \frac{1}{2}CU^2, \qquad (4.13)$$

această energie fiind o caracteristică a dielectricului condensatorului.

Sarcina electrică a condensatorului fiind

$$Q = CU,$$

rezultă că tensiunea la bornele condensatorului este

$$U = \frac{Q}{C} \qquad (4.14)$$

4.2.5. Energia cîmpului magnetic produs de un circuit electric

Orice circuit parcurs de un curent electric, produce în jurul său un cîmp magnetic în care se localizează o anumită energie. Se poate calcula această energie în virtutea formulei stabilită de Helmholtz și Kelvin,

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt}, \qquad (4.15)$$

pentru fenomenul de inducție electromagnetică, descoperit de Faraday. În relația (4.15) $\mathcal{E}$ este tensiunea electromotoare indusă într-un circuit, iar $\frac{d\Phi}{dt}$ este viteza de variație a fluxului de inducție magnetică.

Dacă circuitul este parcurs de curentul electric de intensitate I, același circuit este străbătut de fluxul Φ. Cîmpul de inducție magnetică B, datorit curentului, după cum arată experiența, este în fiecare punct al spațiului, proporțional cu curentul I (în presupunerea că permeabilitatea magnetică este independentă de B). Ca urmare, fluxul ce străbate circuitul va fi și el proporțional cu I,

$$\Phi = LI \qquad (4.16)$$

Coeficientul de proporționalitate L poartă numele de inductanța circuitului și depinde numai de mărimile geometrice care caracterizează circuitul și de mediu. Dacă circuitul considerat nu se găsește în prezența altor circuite, ținînd seama de (4.16), obținem

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt} \qquad (4.17)$$

și reprezintă tensiunea electromotoare datorată variației curentului electric ce parcurge circuitul, numită și tensiune electromotoare de autoinducție. Această tensiune se opune variațiilor de intensitate a curentului electric (legea lui Lenz).

Vom considera cazul general al unui circuit caracterizat prin rezistența R și inductanța L. Presupunem că acestui circuit îi aplicăm o tensiune electromotoare variabilă, de la valoarea zero pînă la valoarea finală $\mathcal{E}$. În același timp t și intensitatea curentului va crește de la zero la o valoare I, iar fluxul Φ ce străbate circuitul, la rîndul lui, va varia de la zero la Φ.

Aplicînd legea lui Ohm și ținînd seama că tensiunea electromotoare rezultantă va fi egală cu tensiunea electromotoare a sursei de curent căreia i se opune tensiunea electromotoare de autoinducție, se obține

$$\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt} = RI$$

sau

$$\mathcal{E} = RI + \frac{d\Phi}{dt}.$$

Înmulțind cu $I dt$ și integrînd, putem scrie

$$\int_0^t \mathcal{E}I\,dt = \int_0^t RI^2\,dt + \int_0^\Phi I\,d\Phi.$$

Cum însă

$$I dt = dQ,$$

iar

$$\int_0^t \mathcal{E}I\,dt = \int_0^Q \mathcal{E}\,dQ = W$$

reprezintă energia produsă de sursa de curent electric în timpul t, rezultă

$$W = \int_0^t RI^2\,dt + \int_0^\Phi I\,d\Phi,$$

în care primul termen din membrul al doilea reprezintă căldura degajată în rezistor, iar ultimul termen, o nouă formă de energie necesară stabilirii curentului I în circuit — energia magnetică a circuitului

$$W_m = \int_0^\Phi I\,d\Phi,$$

care servește la formarea cîmpului de inducție magnetică și caracterizează acest cîmp.

Dacă permeabilitatea μ a mediului este independentă de B, deci de I, L este atunci constant. Avînd în vedere că $\Phi = L\,I$, obținem

$$W_m = \int_0^I L\,I\,dI = \frac{1}{2}LI^2. \qquad (4.18)$$

4.2.6. Expresia energiei în teoria relativității

În evoluția ideilor ce au dominat fizica de-a lungul timpului, nu rareori teorema conservării energiei a jucat un rol esențial.

S-a demonstrat că energia totală sub diferitele ei aspecte rămîne constantă în timpul unei transformări, care se desfășoară într-un sistem închis. Exemplul cel mai simplu îl oferă mecanica sistemelor fără rezistențe la frecare, astfel cum s-a arătat în secțiunea 4.2.3,

$$W_c + W_p = \text{const.}$$

în care W_c și W_p, sînt energia cinetică și respectiv cea potențială a sistemului (a căror măsură este lucrul mecanic ce îl pot transmite).

Concepția asupra energiei a trecut printr-un moment extrem de important, cînd fizicienii au început să mediteze asupra localizării energiei. Mecaniciștii au avut de întîmpinat dificultăți de ordin teoretic. În fond singura formă de energie complet intuitivă în mecanică este energia cinetică (căreia i se spunea la început „forță vie").

Fizicienii au acceptat destul de greu noțiunea de energie potențială. Astfel, se spunea : dacă energia cinetică ni se pare că descrește (atunci cînd se transformă în energie potențială), această descreștere este numai aparentă și că de fapt energia potențială nu este decît energia cinetică a unui alt mediu. Spre exemplu, energia potențială a unui gaz sub presiune nu este altceva decît energia cinetică a moleculelor de gaz, deci a unui mediu. Această explicație, luînd ca bază energia cinetică a unor medii ascunse, nu ne poate satisface, de exemplu, în cazul energiei potențiale a unui corp sub acțiunea gravitației, a energiei unui condensator, a energiei cîmpului magnetic produs de un circuit electric etc.

Aceste manifestări ale energiei conduc la concepția unei energii „localizate" în spațiu. La o concepție asemănătoare conduce și transmiterea prin radiație, nu numai a energiei (de exemplu, a căldurii soarelui), ci chiar și a forțelor, cum este cazul cu presiunea exercitată de lumină. De asemenea, după cum s-a arătat atunci cînd s-a determinat energia cîmpului magnetic produs de un circuit electric, curentul nu se stabilește instantaneu la valoarea sa finală, ci cu o anumită întîrziere.

Aceste probleme au fost rezolvate de teoria relativității a lui Einstein, care pornește de la ideea lui Maxwell a transmisiei interacțiunilor prin contiguitate.

Principiile de bază ale teoriei relativității restrînse au fost formulate de Albert Einstein, pentru a explica rezultatele negative ale lui Michelson, prin care se urmărea să se determine viteza Pămîntului față de spațiul absolut — față de eter, care devenise un fel de materializare a spațiului absolut al lui Newton.

Aceste principii care constituie postulatele de bază ale teoriei relativității sînt :

Principiul relativității restrînse. Pentru stabilirea legilor fizice, toate sistemele de referință în mișcare de translație rectilinie și uniformă sînt identice. Același lucru mai poate fi exprimat prin aceea că prin nici o experiență efectuată în interiorul unui sistem, experiență de natură mecanică, electrică, luminoasă etc., nu se poate constata mișcarea rectilinie și uniformă.

Principiul constanţei vitezei luminii. Viteza luminii în vid este o constantă universală. Această viteză nu depinde de starea de mişcare a sursei de lumină şi este aceeaşi pentru toate sistemele de referinţă în mişcare rectilinie şi uniformă. Viteza luminii este o constantă universală ce nu poate fi depăşită.

Observaţii. Primul principiu al teoriei relativităţii restrînse este în concordanţă cu mecanica clasică, fundamentată de Galilei şi Newton, deci cu independenţa legilor fizice faţă de mişcările rectilinii şi uniforme. Cel de al doilea principiu, acel al constantei vitezei luminii este însă în contradicţie cu mecanica clasică.

De exemplu, să presupunem că pe un vehicul spaţial în repaus faţă de un observator se găseşte un izvor de lumină. Faţă de acest observator viteza luminii va fi de aproximativ 300 000 km/s. Să presupunem acum că acest vehicul se va pune în mişcare, cu o viteză de 25 000 de km/s, în direcţia în care este emisă lumina. Conform mecanicii clasice viteza luminii faţă de acelaşi observator ar urma să fie, conform legii de compunere a vitezelor din mecanica clasică,

$$300\,000 \text{ km/s} + 25\,000 \text{ km/s} = 325\,000 \text{ km/s}.$$

Potrivit principiului relativist al constantei vitezei luminii, viteza luminii va fi însă tot de 300 000 km/s. Şi în general indiferent de sensul mişcării vehiculului spaţial viteza luminii faţă de acelaşi observator se va menţine tot de 300 000 km/s. Urmează deci că în mecanica relativistă adunarea vitezelor trebuie să fie făcută în alt mod, după cum se va vedea în cele ce urmează.

Grupul de transformări Galilei. Orice eveniment este localizat cînd i se cunoaşte poziţia determinată prin cele trei coordonate spaţiale precum şi timpul cînd s-a produs. Vom considera două referenţiale inerţiale: unul, $Oxyz$, şi altul, $O'\,x'\,y'\,z'$, mobil, care se deplasează de-a lungul lui Ox în sens pozitiv avînd o mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $\vec{v}$ în raport cu primul (fig. 4.7). Considerăm un eveniment ce se produce în punctul M, în repaus faţă de sistemul de coordonate $Oxyz$. Acest punct va fi reperat în acest sistem prin coordonatele x, y, z şi de timpul t, măsurat din momentul în care cele două sisteme de coordonate au fost în coincidenţă.

Din punctul de vedere al mecanicii clasice, acelaşi eveniment va fi reperat în sistemul $O'x'y'z'$ prin coordonatele

$$x' = x - vt,\quad y' = y,\quad z' = z. \tag{4.19}$$

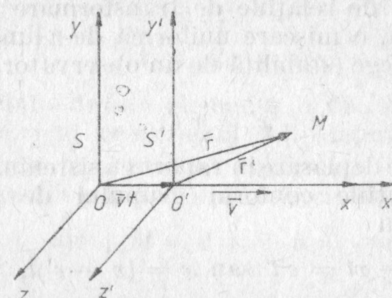


Fig. 4.7.

Cum în mecanica clasică se consideră că scurgerea timpului nu este influenţată de mişcarea rectilinie şi uniformă, rezultă că

$$t' = t, \tag{4.19'}$$

t fiind măsurat de observatorul din sistemul $Oxyz$, iar t', timpul măsurat de observatorul din sistemul $O'x'y'z'$. De asemenea, dacă se cunosc coordonatele evenimentului din sistemul $O'x'y'z'$, se pot obţine coordonatele aceluiaşi eveniment în sistemul $Oxyz$ prin relaţiile

$$x = x' + vt,\quad y = y',\quad z = z',\quad t = t'. \tag{4.20}$$

Grupul relaţiilor (4.19), (4.20) reprezintă relaţiile de transformare Galilei şi ele permit localizarea în spaţiu şi timp a unui eveniment în raport cu unul dintre cele două sisteme de coordonate, cînd se cunoaşte localizarea lui în spaţiu şi în timp, în raport cu celălalt sistem.

Asemenea sisteme de referință, ce au mișcări rectilinii și uniforme, putînd avea viteze diferite, se mai numesc și sisteme inerțiale, pentru că numai față de aceste sisteme este satisfăcut principiul întîi al mecanicii, numit și principiul inerției. Se poate demonstra, de asemenea, că și celelalte două legi ale lui Newton sînt satisfăcute numai cînd sînt raportate față de acest fel de sistem de referință, motiv pentru care spunem că principiile mecanicii sînt invariante față de relațiile de transformare Galilei.

De exemplu, o mișcare uniformă de-a lungul axei absciselor, a cărei lege (stabilită de un observator din sistemul $O'x'y'z'$) este

$$x' = v't',$$

v' fiind viteza de deplasare în raport cu sistemul mobil. Dacă facem substituțiile conform grupului de transformări Galilei, obținem

$$x - vt = v't' \text{ sau } x = (v + v')t,$$

adică efectuează o mișcare uniformă și în raport cu sistemul $Oxyz$, cu o viteză

$$w = v + v'.$$

Ultima relație exprimă legea compunerii vitezelor în mecanica nerelativistă.

Trebuie menționat, de asemenea, că în mecanica newtoniană, în domeniul căreia se aplică grupul de transformări Galilei, masa corpurilor se conservă. Prin urmare, în această mecanică masa corpurilor are aceeași valoare, independent de sistemul de referință și de starea lui de mișcare.

Relativitatea restrînsă și grupul de transformări Lorentz. Vom calcula acum coordonatele unui eveniment cînd se trece de la un sistem inerțial la altul, ținîndu-se seama de postulatele teoriei relativității restrînse, ale lui Albert Einstein.

Fie din nou situația din figura 4.7, în care prin punctul M am reprezentat un eveniment reperat de observatorii din cele două sisteme de coordonate. Ținînd seama de principiile relativității, ne propunem să determinăm coordonatele $x'y'z'$ și timpul t' din sistemul $O'x'y'z'$, așa cum sînt înregistrate de un observator din sistemul $Oxyz$, deci în funcție de elementele corespunzătoare x, y, z, t. Punctul fiind unic în sistemul fix, în sistemul mobil, îi corespunde

de asemenea, un punct unic, fapt care face ca soluția problemei propuse să fie univocă. Or, aceasta înseamnă că relațiile dintre elementele x, y, z, t și x', y', z', t' nu pot fi decît liniare; aceste ecuații vor fi de forma

$$\begin{aligned} x' &= ax + bt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= mx + nt \end{aligned} \tag{4.21}$$

(x' și t' nu depind de alte elemente în afară de x și t), a, b, m și n fiind coeficienți ce urmează să fie determinați.

Să observăm mai întîi că pentru $x = vt$ avem $x' = 0$ și prin urmare din prima relație a sistemului (4.21) obținem

$$avt + bt = 0 \text{ sau } b = -av,$$

de unde,

$$x' = a(x - vt) \tag{4.22}$$

Înlocuind această relație în prima dintre ecuațiile sistemului (4.21), se obține sistemul

$$\begin{aligned} x' &= a(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= mx + nt, \end{aligned} \tag{4.23}$$

care conține numai trei coeficienți a, m și n, care trebuie să fie determinați. Pentru determinarea acestora, se folosește principiul al doilea al teoriei relativității, al constanței vitezei luminii. În acest sens luăm ca un prim eveniment emisia unui semnal luminos, cînd O și O' coincid sau $t = t' = 0$. După un timp, pentru observatorul din sistemul $Oxyz$, semnalul luminos atinge suprafața sferei,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0,$$

c fiind viteza luminii.

Viteza luminii fiind o constantă universală, pentru observatorul din sistemul $O'x'y'z'$, după timpul t', semnalul luminos se va găsi pe sfera

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0,$$

x, y, z, t; x', y', z', t' fiind coordonatele în cele două sisteme ale aceluiași aparat care primește semnalul luminos (al doilea eveniment). Cele două sisteme fiind considerate inerțiale, legile fenomenelor nu se pot schimba cînd se trece de la un sistem la altul; de aceea trebuie ca

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2. \quad (4.24)$$

Introducînd în această identitate coordonatele din sistemul (4.23), se obține

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = (a^2 - c^2m^2)x^2 + y^2 + z^2 + \\ + (a^2v^2 - c^2n^2)t^2 - 2(a^2v + c^2mn)xt,$$

de unde, prin identificarea termenilor, se obține

$$a^2 - c^2m^2 = 1, \quad (4.25)$$

$$a^2v^2 - c^2n^2 = -c^2, \quad (4.26)$$

$$a^2v + c^2mn = 0. \quad (4.27)$$

Din (4.27) se obține valoarea lui m,

$$m = -\frac{a^2v}{c^2n}, \quad (4.28)$$

pe care, introducînd-o în (4.25), rezultă

$$n^2 = \frac{a^4v^2}{c^2(a^2-1)}, \quad (4.29)$$

valoare din care, ținînd seama de relația (4.26), obținem

$$a = \frac{1}{\alpha}, \text{ în care am notat } \alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Introducînd în continuare valoarea lui α în formulele (4.29) și (4.28), în cele din urmă se obține

$$n = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{și} \quad m = -\frac{1}{\alpha}\frac{v}{c^2} = -\frac{v}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

În sfîrșit, formulele de transformare (4.23) devin

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z;$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (4.30)$$

din care putem deduce transformarea inversă,

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z';$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4.31)$$

Acestea sînt relațiile transformării Lorentz speciale, din care rezultă că poziția și durata unui eveniment depind de sistemul de referință în care se efectuează măsurătoarea lor. Se observă, de asemenea, că aceste transformări trec în cele ale lui Galilei, dacă $v \ll c$. Adică transformările galileiene reprezintă, pentru viteze mici în comparație cu viteza luminii, un caz particular al transformărilor Lorentz.

Compunerea vitezelor în mecanica relativistă. Principiile relativității restrînse, a căror consecință directă a fost generalizarea în domeniul mecanicii a grupului transformărilor Lorentz, au produs schimbări asupra modului de a gîndi al fizicienilor. Ele au avut o contribuție considerabilă în special în concepțiile moderne asupra energiei. Pentru a putea privi din acest punct de vedere problema energiei, este necesară studierea cu precădere a compunerii vitezelor, ținînd seama de grupul de transformări Lorentz și a consecințelor ce decurg din el, referitoare la noțiunea de masă.

În acest scop vom considera sistemul de coordonate $O'x'y'z't'$ (fig.4.7) și o rachetă ce se găsește în originea acestui sistem. Racheta se mișcă solidar cu sistemul res-

pectiv în direcţia pozitivă a axei Ox, cu viteza v. Să presupunem că în interiorul rachetei un punct M se află în mişcare, avînd în raport cu sistemul $O'x'y'z't'$ viteza $\boldsymbol{w}'$ de proiecţii w'_x, w'_y şi w'_z pe axele sistemului.

Să determinăm componentele w_x, w_y, w_z ale vitezei $\boldsymbol{w}$ în raport cu sistemul $Oxyzt$, presupus fix.

Mişcarea sistemului $O'x'y'z't'$ faţă de sistemul $Oxyzt$ este o translaţie cu viteza $\vec{v}$ pe linia comună a axelor Ox şi $O'x'$.

Derivînd relaţiile (4.31) ale lui Lorentz în raport cu timpul t, măsurat de un observator din sistemul $Oxyzt$, care se mai numeşte şi timpul său propriu, se obţine

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{dt'}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt}, \qquad \frac{dt}{dt'} = \frac{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Însă

$$\frac{dx}{dt} = w_x; \quad \frac{dy}{dt} = w_y; \quad \frac{dz}{dt} = w_z$$

şi

$$\frac{dx'}{dt'} = w'_x; \quad \frac{dy'}{dt'} = w'_y; \quad \frac{dz'}{dt'} = w'_z.$$

Rezultă

$$w_x = \frac{w'_x + v}{1 + \frac{v w'_x}{c^2}}, \tag{4.32}$$

$$w_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v w'_x}{c^2}} w'_y, \tag{4.33}$$

$$w_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v w'_x}{c^2}} w'_z. \tag{4.34}$$

Relaţiile (4.32), (4.33) şi (4.34) arată că şi în cazul limită, cînd în sistemul $O'x'y'z't'$ se emite un semnal luminos cu viteza $w'_x = c$ (viteza luminii), $w'_y = 0$, $w'_z = 0$, se obţine

$$w_x = c, \quad w_y = 0, \quad w_z = 0,$$

care confirmă constanţa vitezei luminii. Aceste relaţii arată că viteza relativă a unui mobil ce se deplasează faţă de un sistem inerţial, care, la rîndul lui, se deplasează faţă de un alt sistem, nu poate depăşi faţă de acest sistem viteza luminii. Relaţiile mai arată că în cazul în care v şi w'_x sînt mici, $\frac{v w'_x}{c^2}$ şi $\frac{v^2}{c^2}$ devin neglijabile, iar măsurarea vitezei se face în modul descris de cinematica clasică,

$$w_x = w'_x + v, \quad w_y = w'_y \text{ şi } w_z = w'_z,$$

încît formulele mecanicii clasice devin un caz particular al mecanicii einsteiniene.

Variaţia masei cu viteza în teoria relativităţii. Faptul că nici un corp nu poate avea o viteză mai mare decît viteza luminii sugerează ideea că o dată cu creşterea vitezei lui, corpul trebuie să opună o rezistenţă din ce în ce mai mare oricărei tendinţe de accelerare. Or, acest lucru înseamnă că masa trebuie să crească nelimitat cînd viteza lui tinde spre valoarea vitezei luminii. Reamintim că în mecanica nerelativistă masa unui corp este considerată o mărime constantă. Ca urmare, în mod logic, trebuie să ajungem la concluzia că dacă asupra unui corp acţionează o forţă finită, ce îi produce o acceleraţie, o dată cu variaţia vitezei apare şi o variaţie a masei. În mod corespunzător, atunci cînd viteza corpului tinde să atingă viteza luminii, masa sa tinde spre infinit.

Rezultă de aici că masa unui corp nu este o constantă, ci o funcţie crescătoare de viteză. După cum se ştie, produsul $m\vec{v} = \vec{H}$ se numeşte impuls, fiind un vector de aceeaşi orientare cu viteza $\vec{v}$ a corpului de masă m. Admiţînd

că în mecanica nerelativistă m = const, din formula impulsului, obţinem

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}, \qquad (4.35)$$

$\vec{F}$ fiind forţa ce acţionează asupra corpului.

Dacă avem un sistem izolat de corpuri care interacţionează între ele prin forţe şi presupunem că asupra unuia dintre aceste corpuri acţionează un altul cu o forţă $\vec{F}_i$, putem scrie

$$\vec{F}_i = \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i.$$

Însumînd forţele ce acţionează asupra întregului sistem, obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i.$$

Conform însă legii a treia a mecanicii, a lui Newton (a principiului acţiunii şi reacţiunii), forţele interne $\vec{F}_i$ ale sistemului care acţionează între corpuri sînt două cîte două egale şi de semne contrarii, deci

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0, \text{ de unde } \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = 0$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

De aici rezultă principiul conservării impulsului, care se enunţă astfel: într-un sistem izolat, suma geometrică a impulsurilor iniţiale nu poate fi modificată de interacţiunile interne, rămînînd constantă în timp. Remarcabil este faptul că principiul conservării impulsului se deduce direct din cele trei legi ale lui Newton, fără să se mai introducă nici un fel de ipoteză suplimentară.

Pentru a găsi dependenţa masei de viteză, vom căuta să găsim o definiţie a impulsului, care, pentru viteze mici în raport cu viteza luminii, să se reducă la expresia impulsului din mecanica nerelativistă $\vec{H} = m_0 \vec{v}$, m_0 fiind masa de repaus a corpului în sistemul de referinţă considerat. Pentru acest scop vom utiliza legea conservării impulsului, pe care

o vom generaliza în mecanica relativistă. Ţinînd seama de cele arătate mai sus, vom analiza din punct de vedere relativist ciocnirea a două corpuri. În acest scop vom introduce cele două sisteme inerţiale descrise în figura 4.7, reduse însă numai la axele Oxy şi $O'x'y'$ (fig. 4.8), cel de al doilea

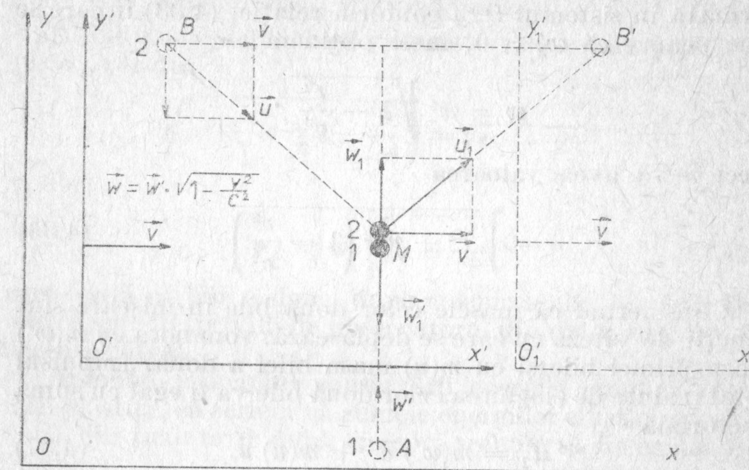


Fig. 4.8.

fiind în mişcare de translaţie, rectilinie şi uniformă, avînd viteza $\vec{v}$ îndreptată în direcţia pozitivă a axei Ox. În fiecare sistem vom considera un observator, aruncînd fiecare în sistemul său, cu aceeaşi viteză w', în direcţie verticală, cîte o bilă identică, cel din sistemul Oxy în sus, iar cel din sistemul $O'x'y'$ în jos, astfel încît ele să se întîlnească într-un punct M. Vom analiza procesul ciocnirii, pe care o vom considera elastică, din sistemul Oxy. Privite din acest sistem, traiectoriile celor două bile vor fi respectiv AMA şi BMB', iar $O'_1x'_1y'_1$ reprezintă poziţia axelor de coordonate $O'x'y'$, atunci cînd bila a doua ajunge în B' şi prima bilă ajunge din nou în A, după ce ambele s-au ciocnit în M.

• Mişcarea primei bile, aruncată din A, desfăşurîndu-se în sistemul de referinţă în care este analizat procesul ciocnirii, va avea loc de-a lungul dreptei AM, cu viteza $\vec{w}'$, cu care este aruncată.

Mişcarea bilei a doua, aruncată din punctul B, ce se află în sistemul mobil $O'x'y'$, va fi funcţie atît de viteza $\vec{w}'$,

cu care a fost aruncată, cît și de viteza $\vec{v}$, de translație a sistemului, din a căror compunere rezultă viteza $\vec{u}$.

Deoarece mișcarea acestei bile este analizată de un observator din sistemul Oxy, viteza $\vec{w}'$ a bilei aruncată din B, ce corespunde sistemului $O'x'y'$, trebuie să fie transformată în sistemul Oxy conform relației (4.33) în care se ține seama că $w'_x = 0$, încît obținem

$$w = w'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Deci $\vec{u}$ va avea valoarea

$$u = \sqrt{v^2 + w'^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}. \tag{4.36}$$

Considerînd că masele celor două bile în mișcare sînt funcții de viteza cu care se deplasează, vom nota cu $m(w')$ masa primei bile și cu $m(u)$ masa bilei a doua. Impulsul total înainte de ciocnirea celor două bile va fi egal cu suma vectorială

$$\vec{H}_1 = m(w')\vec{w}' + m(u)\vec{u}. \tag{4.37}$$

După ciocnire, vitezele celor două bile se modifică și anume, prima bilă se va reintoarce spre punctul A cu viteza w'_1, iar bila a doua va urma drumul MB' cu viteza u_1, care rezultă din compunerea vitezelor w_1 și v. Deoarece ciocnirea este elastică, mărimea acesteia din urmă nu este influențată de procesul de ciocnire, ea rămînînd deci tot timpul egală cu viteza relativă de translație a sistemului $O'x'y'$ față de sistemul Oxy. Deci

$$u_1 = \sqrt{w_1^2 + v^2}, \tag{4.38}$$

de unde rezultă impulsul total după ciocnirea elastică,

$$\vec{H}_2 = m(w'_1)\vec{w}'_1 + m(u_1)\vec{u}_1. \tag{4.39}$$

În conformitate cu principiul conservării impulsului, din (4.37) și (4.39) se obține

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_2 = \text{const}$$

sau

$$m(w')\vec{w}' + m(u)\vec{u} = m(w'_1)\vec{w}'_1 + m(u_1)\vec{u}_1. \tag{4.40}$$

Ținînd seama de proprietățile proiecției sumei vectoriale pe o direcție dată, proiectînd relația (4.40) pe direcția Ox și avînd în vedere, astfel cum s-a arătat, că $\vec{v}$ este atît componenta lui $\vec{u}$ cît și a lui $\vec{u}_1$ după direcția Ox, putem scrie

$$m(u)\,v = m(u_1)\,v$$

sau

$$m(u) = m(u_1), \text{ de unde } u = u_1. \tag{4.41}$$

Avînd în vedere acest rezultat și ecuațiile (4.36) și (4.38), rezultă

$$\sqrt{v^2 + w'^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \sqrt{w_1^2 + v^2}$$

și deci

$$w_1 = w'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{4.42}$$

care arată că bila a doua, după ciocnirea elastică, se reîntoarce spre B (privită de observatorul din sistemul Oxy) cu aceeași viteză.

Aplicînd principiul conservării energiei cinetice, ciocnirii elastice, să scriem că sumele energiilor cinetice a celor două bile înainte și după ciocnire trebuie să fie egale. Se obține

$$\frac{m(w')\,w'^2}{2} + \frac{m(u)\,u^2}{2} = \frac{m(w'_1)\,w_1'^2}{2} + \frac{m(u_1)\,u_1^2}{2}.$$

Însă, conform cu (4.41), $u = u_1$, prin urmare și

$$m(w')\,w'^2 = m(w'_1)\,w_1'^2 \text{ sau } w' = w'_1, \tag{4.43}$$

ceea ce arată că și prima bilă trebuie să se reîntoarcă în A, cu viteza pe care a avut-o înainte de ciocnire.

Proiectînd egalitatea vectorială (4.40) pe direcția transversală a deplasării $O'x'y'$, utilizînd și egalitățile de (4.43), (4.41) și (4.42), se obține

$$m(w')\,w' - m(u)\,w'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= -m(w')\,w' + m(u)\,w'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

care se reduce la

$$m(u) = \frac{m(w')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.44}$$

relaţie valabilă, oricare ar fi mărimea vitezelor v şi w'.

Dacă în sistemul de bile ce se ciocnesc vom face ca modulul vitezei $\vec{w}'$ să tindă spre zero, masa primei bile va tinde spre valoarea masei sale în stare de repaus, pe care o vom nota cu m_0. Totodată, modulul vitezei $\vec{u}$ a bilei a doua va tinde spre viteza relativă $\vec{v}$, de transport a sistemului $O'x'y'$ faţă de sistemul Oxy, iar masa m a acestei bile are viteza relativă $\vec{v}$ faţă de o bilă identică. Rezultă că atunci cînd $\vec{w}'$ tinde spre zero, relaţia (4.44) se poate scrie sub forma

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.45}$$

Din această relaţie, care reprezintă dependenţa masei de viteză, rezultă că masa, ca măsură a inerţiei corpului, este cu atît mai mare cu cît viteza corpului este mai mare. De asemenea, pentru viteze mici în comparaţie cu viteza luminii, raportul v/c are valoare neglijabilă şi obţinem

$$m = m_0,$$

ceea ce arată că în cadrul mecanicii newtoniene putem considera masa corpurilor constantă.

Experienţele privind mişcarea unor particule cu sarcină electrică în cîmpuri electrice sau magnetice, cu ajutorul cărora li se pot comunica viteze foarte mari, au arătat că o dată cu creşterea vitezei particulelor creşte şi masa lor, în concordanţă cu relaţia (4.45).

Cu formula (4.45) putem calcula masa unei particule care se mişcă cu viteza v, dacă $v \neq c$, atunci cînd îi cunoaştem masa de repaus m_0. Formula arată că nu este posibil să accelerăm particule oricît de mici ar fi masele lor de repaus, pînă la viteza luminii, deoarece în apropierea acestei viteze, masele lor tinzînd spre infinit, forţele necesare accelerării, va trebui ca la rîndul lor să fie infinite. În schimb însă, putem afirma cu toată convingerea că dacă masa unei particule este egală cu zero în stare de repaus, ea poate atinge viteza luminii. Din această categorie fac parte fotonii sau cuantele de lumină. În schimb însă, dacă o particulă are viteza c, aceasta fiind invariantă, rezultă că nu există pentru astfel de particule un referenţial faţă de care să se afle în repaus, adică pentru astfel de particule nu are sens conceptul de masă de repaus. Şi de aici rezultă, formal, $m_0 = 0$.

Ajungem astfel la o concluzie foarte importantă: toate particulele elementare existente în natură, se împart în două categorii: particule cu masă de repaus nulă şi particule cu masă de repaus diferită de zero.

Se pune însă întrebarea: poate oare o particulă dintr-o categorie să se transforme într-o particulă din cealaltă categorie? Se admite, de exemplu, că un electron ciocnindu-se de un pozitron, ambele particule încetează de a mai exista, punînd în acelaşi timp în libertate doi fotoni de mare energie. Acestui fenomen i se mai spune uneori impropriu „anihilare", adică distrugerea materiei. Se înţelege că nu se întîmplă nici un fel de distrugere, ci numai transformarea unor particule cu masă de repaus în particule fără masă de repaus.

Expresia energiei în teoria relativităţii. Pentru calculul expresiei energiei în teoria relativităţii, vom proceda în acelaşi fel ca în 4.2.2, cînd am calculat transformarea lucrului mecanic transmis de o forţă asupra unui corp în energie cinetică. De această dată vom ţine seama că masa corpului creşte o dată cu viteza corpului, conform relaţiei (4.45). În acest scop, vom scrie lucrul mecanic elementar sub forma produsului scalar dintre forţa $\vec{F}$, care acţionează asupra unui corp liber de masă m, asimilat cu un punct material, şi deplasarea sa $d\vec{s}$,

$$dW = \vec{F}\, d\vec{s}.$$

Notînd cu $\vec{v}$ viteza corpului, conform relaţiei (4.35) putem scrie

$$dW = d(m\vec{v})\frac{d\vec{s}}{dt} = d(m\vec{v})\,\vec{v} = (\vec{v}dm + md\vec{v})\,\vec{v}$$

sau

$$dW = m\vec{v}d\vec{v} + \vec{v}^2\,dm = \frac{m}{2}\,d(\vec{v}^2) + \vec{v}^2 dm.$$

Ştiind însă că produsul scalar al unui vector prin el însuşi este egal cu pătratul modulului său, obţinem

$$dW = \frac{m}{2}\,d(v^2) + v^2 dm. \tag{4.46}$$

În mecanica nerelativistă, masa unui corp fiind considerată invariabilă, $dm = 0$, relaţia precedentă se reduce la

$$dW = \frac{m}{2}\,d(v^2)$$

și astfel lucrul mecanic efectuat de o forță $\vec{F}$, ce acționează asupra unui punct material de-a lungul unei traiectorii oarecare, este

$$W = \frac{m}{2}\int d(v^2) = \frac{mv^2}{2} + C.$$

Dacă forța începe să acționeze asupra corpului cînd acesta se află în repaus, atunci pentru $v = 0$, $W = 0$ și deci $C = 0$ și vom putea scrie

$$W = \frac{1}{2}mv^2,$$

aceasta fiind expresia lucrului mecanic, necesar pentru a scoate un punct material de masă m din starea de repaus și a-i comunica viteza $\vec{v}$.

Relația (4.45), care arată modul în care masa variază cu viteza, se mai poate scrie sub forma

$$m_0^2c^2 = m^2c^2 - m^2v^2,$$

din a cărei diferențiere obținem

$$2c^2mdm - 2mv^2dm - 2m^2vdv = 0,$$

de unde

$$v^2dm = c^2dm - \frac{m}{2}d(v^2).$$

Să introducem ultima relație în (4.46) și să ținem seama că dW este egal cu energia dW transmisă punctului material de masă m. Vom putea scrie

$$dW = c^2\, dm$$

și, prin integrare,

$$W = mc^2 + C.$$

Pentru $m = 0$, deoarece atît lucrul mecanic, cît și energia nu pot exista fără masă (în afara materiei), rezultă imediat că $C = 0$ și, ținînd seama de (4.45), putem scrie

$$W = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0c^2(1 - \alpha^2)^{-1/2},$$

în care am notat $\alpha = \frac{v}{c}$. Prin dezvoltare în serie, conform formulei binomului lui Newton, obținem

$$W = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\alpha^4 + \ldots\right)$$

sau, avînd în vedere valoarea lui α, obținem

$$W = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

Folosind numai primii doi termeni ai dezvoltării în serie, rezultă

$$W = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2,$$

relație ce arată că energia unui corp în mișcare rezultă din însumarea energiei sale cinetice, $\frac{1}{2}m_0v^2$, și o energie ce se obține din produsul dintre masa sa de repaus și pătratul vitezei luminii, m_0c^2, care reprezintă energia masei de repaus a corpului. Această ultimă energie se mai numește și energia sa proprie.

Relația

$$W_0 = m_0c^2 \tag{4.47}$$

este celebra ecuație a lui Einstein, considerată adeseori drept cea mai importantă formulă a teoriei relativității și care este o relație fundamentală în fizica nucleară. Ea arată că materia constituie un uriaș izvor de energie.

Conform acestei formule, energia corespunzătoare unui kilogram de substanță este

$$W_0 = 1 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 9 \cdot 10^{16}\ \text{J}.$$

Pentru a ne da mai bine seama de însemnătatea acestei energii, o vom compara cu cea obținută prin arderea petrolului. Dacă vom socoti 42 MJ/kg puterea calorică a petrolului, această cantitate de energie este echivalentă cu aceea obținută prin arderea a $9 \cdot 10^{16}/42 \cdot 10^6 \simeq 2 \cdot 10^9$ kilograme de petrol.

Este greșită interpretarea ce se dă uneori formulei (4.47) că ea ar reprezenta transformarea materiei în energie. Singura interpretare corectă a relației (4.47) este următoarea: sistemul fizic într-o stare dată se caracterizează

prin mărimile de stare m şi W. Între aceste mărimi există relaţia $W = mc^2$ şi, în consecinţă, între variabilele lor există relaţia

$$\Delta W = c^2 \Delta m. \qquad (4.48)$$

Această formulă se referă la procesele de trecere a materiei de la o stare la alta, materia prezentîndu-se în natură sub forme variate: substanţă (sub formele ei de agregare solidă, lichidă, gazoasă) plasmă, radiaţii etc. cărora, potrivit teoriei relativităţii trebuie să le atribuim o masă inertă.

Transformările substanţei la nivel molecular, cum sînt acelea care se produc în reacţiile chimice, pun în libertate cantităţi prea mici de energie, pentru ca prin mijloacele de măsurare de care dispunem, să putem determina masa inertă, corespunzătoare energiei puse în libertate sau absorbită sub diferite forme. Astfel, masa inertă corespunzătoare energiei obţinute la arderea unui kg de petrol, prin care se pun în libertate 42 MJ, este

$$\frac{42 \cdot 10^{16}}{9 \cdot 10^{16}} \simeq 47 \cdot 10^{-11} \text{ kg} = 47 \cdot 10^{-8} \text{ g},$$

adică 0,47 milionimi de gram, prea mică pentru a putea fi măsurată.

Formula lui Einstein este importantă, deoarece sintetizează într-o formă unică cele două legi cunoscute, a conservării masei şi a conservării energiei, care erau considerate ca legi separate. Într-adevăr, legea conservării masei, descoperită de Lavoisier şi care arată că masa unei substanţe compuse este egală cu suma maselor componentelor ce intră în compunerea ei, este numai aproximativă. Conform teoriei relativităţii, masa dinamică se conservă riguros, relaţia (4.48) arătînd că orice variaţie a energiei unui sistem antrenează şi o variaţie a masei sistemului, egală cu cîtul dintre variaţia energiei şi pătratul vitezei luminii. Această variaţie a masei reprezintă masa corespunzătoare energiei radiante. Astfel, din combinarea a 2 grame de hidrogen şi 16 grame de oxigen nu obţinem exact 18 grame de apă, pentru că această reacţie chimică este însoţită de degajarea unei cantităţi de căldură egală cu 286 kJ, care antrenează o variaţie a masei, egală cu

$$\Delta m = \frac{286 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^{16}} \simeq 3 \cdot 10^{-12} \text{ kg} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ g}.$$

Variaţia masei, astfel calculată, ne arată totuşi că legea conservării masei, a lui Lavoisier, poate fi considerată ca o bună aproximaţie a realităţii.

Situaţia se schimbă radical în cazul reacţiilor în care raportul dintre energia schimbată cu mediul exterior şi masa substanţelor ce intră în reacţie devine foarte mare, cum este cazul reacţiilor nucleare sau acelea dintre particulele elementare, mai bine zis, atunci cînd se trece de la nivelul macroscopic sau molecular la cel microscopic sau atomic.

Pentru a exemplifica, vom considera reacţia de fisiune a izotopului 235 al uraniului, folosită în reactorii nucleari. Se ştie că dacă nucleul acestui izotop al uraniului este lovit de un neutron venit din exterior, el fisionează aproape imediat, în circa $10^{-13} - 10^{-14}$ secunde, în două fragmente aproape egale, emiţînd totodată neutroni şi radiaţii gamma foarte penetrante. Dacă se face suma maselor neutronilor şi a fragmentelor rezultate din fisiune, se găseşte că acest proces nuclear s-a desfăşurat cu o variaţie a masei (defect de masă), egală aproximativ cu 0,225 unităţi atomice de masă. Rezultă că prin fisiunea unui gram de uraniu cu masa atomică 235 se produce o variaţie a masei

$$\Delta m = \frac{0{,}225}{235} \simeq 96 \cdot 10^{-5} \text{ g} = 96 \cdot 10^{-8} \text{ kg}.$$

Această masă se „transformă", în timpul reacţiei nucleare, în energie şi, conform relaţiei (4.47), rezultă că prin fisiunea unui gram din izotopul 235 al uraniului, trebuie să se producă o energie egală cu

$$W = mc^2 = 96 \cdot 10^{-8} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 864 \cdot 10^8 \text{ J},$$

care corespunde unei călduri rezultate din arderea a

$$864 \cdot 10^8 / 42 \cdot 10^6 \simeq 2057 \text{ kg} \approx 2 \text{ t petrol}.$$

Se constată experimental că această energie se regăseşte: 4% în radiaţiile emise în timpul fisiunii, 16% în emisiunile radioactive a fragmentelor produse prin fisiune, iar restul de 80% reprezintă energia cinetică a înseşi acestor fragmente, care, fiind proiectate cu o viteză considerabilă, ciocnesc atomii vecini, transformîndu-şi energia lor cinetică în căldură. Această căldură este în cele din urmă exploatată în reactorii nucleari.

Capitolul 5. MODELUL CÎMPURILOR FIZICE POTENȚIALE PLANE

„Dacă, înainte de a începe munca, ar trebui mai întîi să găsești căile de înlăturare a tuturor piedicilor posibile, care ar putea fi întîlnite în timpul înfăptuirii sale, atunci nici o muncă nu ar mai fi începută."

Samuel JOHNSON

5.1. Cîmp fizic de forțe. Generalități

Prin cîmp se înțeleg două noțiuni distincte:

a. O formă de materie prin care se transmit interacțiunile dintre sisteme, de exemplu: cîmp gravific, cîmp electromagnetic, cîmp nuclear, cîmp mezonic etc.

b. Mulțimea nenumărabilă a valorilor pe care le poate lua, într-un domeniu dat, o mărime dependentă de x, y, z și t. Un astfel de cîmp poate fi scalar, vectorial ... după tipul mărimii fizice: cîmp de temperatură, cîmp de viteze, cîmp de forțe, cîmp de inducție electrică, respectiv magnetică ș.a.m.d.

Cîmpul vectorial, a cărui stare locală și instantanee este caracterizată de forțe care acționează asupra punctelor materiale, se numește *cîmp de forțe*. De exemplu, un punct material aflat sub acțiunea gravitației se găsește într-un cîmp gravific. Un corp ce posedă sarcini electrice și care este atras sau respins de alte corpuri încărcate cu electricitate se găsește într-un cîmp de forțe electrostatice etc.

Forța $\vec{F}$ cu care acționează cîmpul asupra punctului material (numită uneori funcție de punct) este determinată, dacă se cunosc cele trei componente X, Y, Z ale forței în funcție de coordonatele x, y, z, t ale punctului său de aplicație și de timp. Cînd mărimea acestor forțe nu depinde de timp, ci numai de poziție, se spune că punctul sau corpul material se află sau se mișcă într-un cîmp invariabil de forțe.

Pentru a studia cîmpurile fizice, vom lua ca exemplu cîmpul electric, rezultatele generalizîndu-le apoi în alte domenii ale fizicii. În acest scop vom rezuma mai jos unele definiții și proprietăți ale cîmpului electric.

Cîmpul electric este cîmpul vectorial purtător material al interacțiunilor dintre sarcinile electrice, fiind caracterizat în fiecare punct de intensitatea cîmpului electric $\vec{E}$. Cîmpul electric poate fi studiat introducînd în cîmp un mic corp de probă încărcat cu o sarcină electrică punctiformă q, care să nu modifice distribuția de sarcină a cîmpului.

Se numește intensitatea cîmpului electric $\vec{E}$ limita raportului dintre forța $\vec{F}$ care acționează asupra sarcinii electrice q a corpului de probă aflat în vid și sarcina respectivă,

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q}.$$

Procesul de trecere la limită are sens fizic (experimental) numai dacă se admite ipoteza continuității sarcinii electrice și a materiei, în sensul că acestea se pot diviza oricît de mult. Această ipoteză este fundamentală pentru întreaga teorie macroscopică (fenomenologică) a interacțiunilor electromagnetice.

Se numește linie de cîmp curba a cărei tangentă în orice punct are direcția vectorului $\vec{E}$, intensitate a cîmpului. Dacă se așază în spațiu o curbă închisă și prin fiecare dintre punctele ei vom duce linia de cîmp corespunzătoare, vom obține ceea ce se numește un tub de linii de cîmp (fig. 5.1).

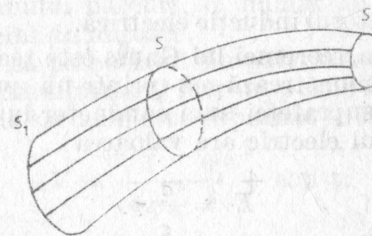


Fig. 5.1.

Considerăm într-un cîmp electric o suprafață închisă S. Fluxul ce trece prin elementul dA al suprafeței S este dat de expresia

$$d\psi = E dA \cos\alpha,$$

α fiind unghiul făcut de direcţia normalei la suprafaţă cu direcţia forţei. Elementul de suprafaţă dA se poate asimila cu un vector care are o mărime egală cu aria sa, iar ca direcţie şi sens, normala la suprafaţă. În acest fel, fluxul ce trece prin aria elementară dA se exprimă prin produsul scalar

$$d\psi = \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

Fluxul total ce trece prin întreaga suprafaţă S va fi

$$\psi = \oint_S \vec{E} d\vec{A}.$$

În electrostatică se demonstrează teorema lui Gaus, care se enunţă astfel : fluxul de forţă ce străbate o suprafaţă închisă de formă oarecare este egal cu

$$\psi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon},$$

Q fiind sarcina electrică cuprinsă în interiorul suprafeţei, iar ε permitivitatea absolută a mediului, presupus omogen, liniar şi izotrop. Pentru un mediu oarecare, în cazul în care sarcina electrică se află în interiorul suprafeţei închise, teorema lui Gauss se scrie

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = Q,$$

unde $\vec{D}$ este vectorul inducţie electrică.

O aplicaţie a teoremei lui Gauss este teorema lui Coulomb, care demonstrează că printr-un punct exterior, din apropierea suprafeţei unui conductor în echilibru electrostatic, cîmpul electric are valoarea

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

De asemenea, se mai demonstrează că presiunea electrostatică a unui conductor este

$$p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon}.$$

Aceste relaţii sînt exprimate în sistemul internaţional de unităţi, în care $\vec{E}$ intensitatea cîmpului — se măsoară în V/m, ψ — fluxul electric — se măsoară în coulombi, Q — sarcina electrică — se măsoară în coulombi, σ — densitatea superficială de sarcină — se măsoară în C/m^2, ε — permitivitate absolută a mediului — se măsoară în F/m.

O altă aplicaţie a teoremei lui Gaus o reprezintă teorema elementelor corespondente. Se numesc elemente corespondente elementele de suprafaţă dA şi dA', delimitate pe doi conductori M şi N, de un tub de linii de cimp foarte îngust (fig. 5.2). Conform teoremei menţionate, sarcinile elementelor corespunzătoare sînt egale şi de semn contrar.

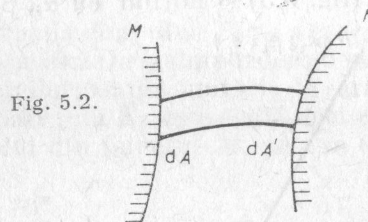


Fig. 5.2.

În 4.2.4 am arătat cum se calculează lucrul mecanic necesar pentru a deplasa un corp încărcat cu sarcină electrică atunci cînd se găseşte sub acţiunea altor sarcini electrice fixe, sarcina aflîndu-se deci într-un cîmp de forţe electrostatice. Am mai arătat că acest lucru mecanic nu depinde de forma drumului parcurs, ci numai de poziţia iniţială şi finală a sarcinii în mişcare.

Am definit că potenţialul cîmpului electrostatic produs de o sarcină punctiformă Q într-un punct M, ce se găseşte la distanţa r de sarcină, este exprimat în SI prin

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r} + \text{const},$$

unde constanta aditivă este arbitrară. Făcînd convenţia $V(\infty) = 0$, rezultă const $= 0$ şi deci, potenţialul dintr-un punct al cîmpului, produs de sarcina Q, se scrie

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}.$$

Dacă $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ și $r_1, r_2, r_3 \ldots$ sînt sarcinile electrice, respectiv distanțele pînă la un punct M al cîmpului produs de aceste sarcini, atunci potențialul în acel punct este

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{r_i}. \qquad (5.1)$$

În cazul unor sarcini distribuite continuu în volum sau pe suprafețe,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\mathrm{d}Q}{r} \quad \text{sau} \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\mathrm{d}Q}{r}.$$

Raportînd tot sistemul de sarcini electrice la un sistem $Oxyz$ de coordonate (fig. 5.3) și notînd cu $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ coor-

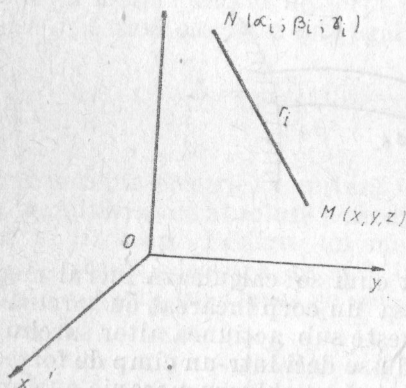


Fig. 5.3.

donatele sarcinilor electrice Q_i și cu x, y, z coordonatele punctului M, distanța r_i de la sistemul de sarcini electrice la punctul M se poate scrie

$$r_i^2 = (x-\alpha_i)^2 + (y-\beta_i)^2 + (z-\gamma_i)^2,$$

de unde

$$\frac{\partial r_i^2}{\partial x} = 2r_i\frac{\partial r_i}{\partial x} = 2(x-\alpha_i) \quad \text{sau} \quad \frac{\partial r_i}{\partial x} = \frac{x-\alpha_i}{r_i}.$$

Pe de altă parte, din relația (5.1)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\frac{Q_i}{r_i}}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{r_i^2}\frac{\partial r_i}{\partial x}$$

sau

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum\frac{Q_i}{r_i^2}\frac{x-\alpha_i}{r_i}.$$

Cum însă $\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_i}{r_i^2}$ este egală cu cîmpul E_i cu care o sarcină Q_i acționează asupra unității de sarcină aflată în punctul M, iar $\frac{x-\alpha_i}{r_i}$ este cosinusul director făcut de direcția cîmpului cu direcția axei Ox, se obține

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\sum_{i=1}^{n}E_{x_i} = -E_x;$$

E_{x_i} este proiecția cîmpului $\vec{E}_i$ pe axa Ox, iar E_x este suma proiecțiilor pe axa Ox a cîmpurilor cu care acționează totalitatea sarcinilor asupra unității de sarcină aflată în punctul M. Valoarea lui E_x este egală deci cu proiecția intensității cîmpului din punctul M, pe axa Ox. În același mod obținem

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -E_y \quad \text{și} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -E_z.$$

Punctele dintr-un cîmp electric care au același potențial se găsesc pe o suprafață $V(x, y, z) = \text{const}$, numită suprafață echipotențială. Am văzut în 4.2.4 că suprafețele conductorilor încărcați cu electricitate sînt și ele echipotențiale.

Se constată că $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ sînt cosinușii directori ai normalei într-un punct oarecare (x, y, z) la suprafața echipotențială $V(xyz) = \text{const}$.

Deoarece însă, cîmpul electric

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

are componentele egale cu

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad (5.2)$$

înseamnă că tangenta la liniile de cîmp, în punctele în care acestea întîlnesc suprafața echipotențială, au aceeași

direcţie cu normala la suprafaţa echipotenţială; liniile de cîmp şi suprafeţele echipotenţiale sînt deci ortogonale.

Din cele arătate rezultă că dacă se cunoaşte potenţialul într-un punct, se poate calcula cu uşurinţă mărimea cîmpului electric în acel punct. Acest fel de calcul prezintă un mare avantaj, deoarece, datorită unei distribuţii oarecare de sarcini, potenţialele se adună algebric, în timp ce forţele şi intensitatea cîmpului, fiind mărimi vectoriale, nu se pot însuma decît vectorial.

Să aplicăm teorema lui Gauss pentru suprafaţa ce delimitează volumul elementar (dx, dy, dz) care nu conţine sarcini electrice (fig. 5.4); fluxul ce iese din această suprafaţă va fi prin urmare nul.

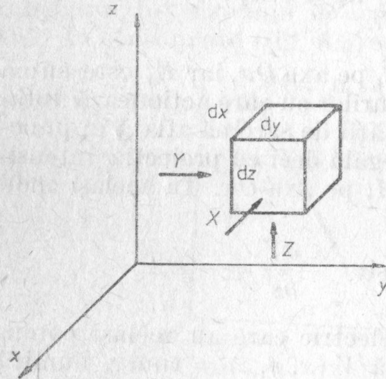


Fig. 5.4.

Vom nota cele trei componente ale cîmpului după cele trei axe E_x, E_y, E_z şi ţinem seama că fluxul ce intră într-un volum este negativ. Putem scrie

$$-E_x \, dy \, dz - E_y \, dx \, dz - E_z \, dx \, dy = \psi_1.$$

Deoarece componentele cîmpului la ieşirea din volumul ($dx \; dy \; dz$) sînt

$$E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx; \quad E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy, \quad E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz,$$

fluxul (pozitiv) ce iese din volumul respectiv este

$$\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx\right) dy \, dz + \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy\right) dx \, dz + \\ + \left(E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz\right) dx \, dy = \psi_2.$$

Însumînd expresiile corespunzătoare pentru ψ_1 şi ψ_2, obţinem fluxul ce străbate suprafaţa volumului ($dx \, dy \, dz$), care, conform teoremei lui Gaus, trebuie să fie nul, deoarece volumul considerat nu conţine sarcini electrice,

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dx \, dy \, dz = 0$$

sau

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0,$$

expresie care poartă numele de divergenţă. Înlocuind E_x, E_y, E_z cu valorile din (5.2), se obţine expresia

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{5.3}$$

numită ecuaţia lui Laplace. Cîmpurile fizice care satisfac această ecuaţie se mai numesc cîmpuri laplaceiene, cîmpuri potenţiale sau cîmpuri de divergenţă nulă.

Din cele arătate, problema determinării cîmpului electrostatic este simplă, cînd se cunoaşte distribuţia sarcinilor, căci ea se reduce în cele din urmă la calculul unor integrale. Cînd într-un cîmp electrostatic se introduc conductori, problema devine foarte complicată, deoarece trebuie să se determine distribuţia acestor sarcini astfel ca suprafaţa conductorilor să fie echipotenţială. Problemele cele mai simple de această natură sînt acelea în care funcţia potenţială V satisface, în orice punct din exteriorul conductorilor, relaţia (5.3) a lui Laplace, care se mai scrie, în formalismul analizei vectoriale, astfel

$$\nabla^2 V = 0.$$

După cum s-a arătat, suprafeţele echipotenţiale sînt în orice punct din spaţiu normale la vectorul intensitate a cîmpului $\vec{E}$. Se demonstrează că nu există decît o singură funcţie V care să satisfacă ecuaţia lui Laplace şi care să aibă valori date pe un număr de conductori în repaus, impunîndu-se totodată şi condiţia de a avea un potenţial cunoscut pe unul dintre conductorii ce închide sistemul sau, în lipsa acestuia, condiţia ca la infinit $V \to 0$.

Din acest motiv, atunci cînd pe o cale particulară se obţine soluţia unei probleme de fizică de această natură

și care satisface condițiile precedente, soluția trebuie considerată unică și definitivă, oricare au fost mijloacele folosite pentru a o rezolva.

Astfel de probleme, în care se cere rezolvarea unei ecuații diferențiale cu anumite condiții de frontieră, se numesc probleme cu valori limită. Ele au format, de-a lungul timpului, obiectul multor studii matematice, care au arătat că în cazul conductorilor cu forme complicate, nu există metode analitice generale, pentru găsirea soluțiilor.

În legătură cu suprafețele echipotențiale există o teoremă care pune în evidență legătura dintre sarcinile electrice de pe suprafață și structura cîmpului creat de acestea: putem materializa orice suprafață echipotențială printr-o suprafață conductoare, lăsînd să se răspîndească pe ea sarcinile interioare, fără ca structura cîmpului exterior să se schimbe.

5.2. Proprietățile cîmpurilor vectoriale plane. Introducere matematică

Există situații, în aparență foarte particulare, dar cu multe aplicații în practică, în care variațiile cîmpurilor fizice într-o direcție a axelor de coordonate sînt egale cu zero sau pot fi neglijate în comparație cu variațiile pe celelalte două direcții. Deoarece în astfel de probleme intensitatea cîmpului depinde numai de două coordonate, de exemplu, x și y, ele se numesc bidimensionale, iar $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$, încît ecuația lui Laplace se reduce la

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \qquad (5.4)$$

Cîmpul definit de o astfel de ecuație se numește cîmp plan, deoarece vectorul intensitate a cîmpului $\vec{E}$, fiind independent de z, păstrează aceeași mărime, direcție și sens cînd punctul său de aplicație se deplasează după normala la planul Oxy. Cîmpul este definit deci prin două componente E_x și E_y. Evident, suprafețele echipotențiale ale cîmpurilor plane vor fi suprafețe cilindrice avînd, în acest caz, generatoarele paralele cu axa Oz. Intersecțiile acestor suprafețe cu planul Oxy formează o familie de curbe echipotențiale, a căror ecuație $V(xy) = C$ este o soluție a ecuației (5.4) a lui Laplace, C fiind o constantă arbitrară.

De remarcat că, în mod practic, asemenea probleme nu pot interveni atîta timp cît conductorii au dimensiuni finite. Cu toate acestea, există numeroase cazuri importante în care lungimea conductorilor cilindrici este cu mult mai mare decît domeniul considerat, încît efectul capetelor este neglijabil și problema devine bidimensională. Ecuația lui Laplace în plan constituie modelul matematic al cîmpurilor potențiale plane, asupra cărora vom face un studiu introductiv în acest capitol. Inițial, pentru concretizare, ne vom menține, ca și pînă acum, tot la modelul cîmpului electrostatic.

În cazul particular al cîmpurilor potențiale plane, putem asocia funcției potențiale $V(xy)$ — soluție a ecuației lui Laplace — o funcție flux conjugată acesteia și care să îndeplinească condițiile

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{și} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \qquad (5.5)$$

Ținînd seama de (5.2), avem

$$-E_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{și} \quad -E_y = \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \qquad (5.6)$$

Această funcție $\psi = C'$ (C' fiind o constantă arbitrară) se poate determina în virtutea condițiilor (5.6), de mai sus, prin calculul unei integrale, dacă se cunoaște funcția V care trebuie să satisfacă ecuația lui Laplace (ca exemplu, v. (5.16)).

Funcțiile V și ψ, legate prin relațiile (5.5), se numesc funcții conjugate; ele se bucură de proprietăți fundamentale în studiul cîmpurilor plane, deoarece se pot schimba între ele, schimbînd semnul, putînd alege pe oricare funcție potențial, iar pe cealaltă, funcție flux.

Dacă derivăm prima dintre relațiile (5.6) în raport cu x și a doua în raport cu y, obținem

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

și deci

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Procedînd în acelaşi mod, obţinem

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Prin urmare, funcţiile V şi ψ satisfac ecuaţiile lui Laplace.

Aceleaşi condiţii (5.5) exprimate în coordonate polare au forma

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}, \tag{5.7}$$

în timp ce ecuaţia lui Laplace în coordonate polare plane, în cazul cîmpurilor potenţiale, are expresia următoare:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0. \tag{5.8}$$

Cele două familii de curbe $V(x, y) = C$ şi $\psi(x, y) = C'$ sînt ortogonale. Într-adevăr, coeficienţii unghiulari ai tangentelor în acelaşi punct ai curbelor C şi C' sînt, respectiv

$$\frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} : \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Conform relaţiilor fundamentale (5.5), această ultimă expresie este egală cu

$$\frac{\partial V}{\partial x} : -\frac{\partial V}{\partial y},$$

produsul acestor coeficienţi fiind deci egal cu -1, ceea ce arată că unghiurile după care se intersectează cele două familii de curbe sînt drepte. Mai rezultă că familia de curbe ce reprezintă grafic funcţia de flux corespunde, în cazul cîmpului electrostatic, liniilor de cîmp.

Reprezentarea cîmpurilor prin familiile de curbe de potenţial constant $V(x, y) = C$ şi de flux $\psi(x, y) = C'$, permite calcularea în orice punct, pe cale grafică, a intensităţii cîmpului. Pentru aceasta vom da lui V un număr oarecare de valori, în progresie aritmetică. Fiecărei valori a lui V îi va corespunde în plan o curbă bine determinată. Vom da apoi lui ψ, de asemenea, un număr de valori, tot în progresie aritmetică, cu aceeaşi raţie, cărora le vor corespunde alte curbe. Ambele familii de curbe vor forma o reţea de curbe ce se întretaie — după cum s-a arătat — ortogonal.

Vom considera un ochi elementar (fig. 5.5) al acestei reţele şi ne propunem să calculăm mărimea unei laturi a unui asemenea ochi, care la limită este egal cu $AB =$

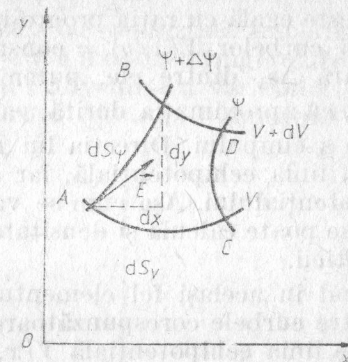


Fig. 5.5.

$= CD = \mathrm{d}s_\psi$. Această latură se găseşte pe curba $\psi = \text{const}$ şi este cuprinsă între două curbe echipotenţiale V şi $V + \mathrm{d}V$. Lungimea ei este

$$\mathrm{d}s_\psi = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}.$$

Într-un punct oarecare al cîmpului în care $\psi(x, y)$ are o valoare dată $\psi(x, y) = \text{const}$, valorile lui $\mathrm{d}x$ şi $\mathrm{d}y$ se obţin prin rezolvarea următorului sistem de ecuaţii:

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\mathrm{d}y = 0.$$

Ţinînd seama că $V(x, y)$ şi $\psi(x, y)$ sînt funcţii conjugate şi introducînd în relaţia precedentă valorile lui $\mathrm{d}x$ şi $\mathrm{d}y$, obţinem

$$\mathrm{d}s_\psi = \frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2}} = \frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} = \frac{\mathrm{d}V}{E}$$

sau

$$E = \frac{dV}{ds_\psi} \simeq \frac{\Delta V}{\Delta s_\psi}.$$

Prin urmare, avînd trasată o rețea de curbe echipotențiale și de flux, dacă cunoaștem diferența de potențial ΔV dintre două linii echipotențiale vecine — în cazul nostru ea este egală cu rația progresiei aritmetice folosită la trasarea curbelor $V(x, y) = \text{const}$ — precum și distanța liniară Δs_ψ dintre ele, putem obține în punctul considerat, cu aproximația dorită, valoarea $\vec{E}$ a vectorului intensitate a cîmpului. Direcția lui $\vec{E}$ este în acel punct normală la linia echipotențială, iar sensul, acela al descreșterii potențialului. Așa cum se va vedea mai departe, tot astfel se poate calcula și densitatea de curent în cazul electrocineticii.

Calculînd în același fel elementul de arc $AC = ds_V$, cuprins între curbele corespunzătoare liniilor de flux ψ și $\psi + d\psi$, pe linia echipotențială $V(x, y) = C$, obținem

$$ds_V = \frac{d\psi}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2}}.$$

Cum, prin ipoteză, pentru a reprezenta pe $V(x, y) = C$ și $\psi(x, y) = C'$, am ales valorile lui C și C' în progresie aritmetică, cu aceeași rație, avem $dV = d\psi$, de unde rezultă că și $ds_V = ds_\psi$. Prin urmare, ochiul de rețea $ABCD$ poate fi aproximat cu un pătrat, în condițiile în care $\Delta V \to 0$ și $\Delta\psi \to 0$.

Reprezentarea familiilor de curbe $V(x, y) = C$ și $\psi(x, y) = C'$ are o mare importanță, întrucît oferă posibilitatea calculării pe cale grafică a intensității cîmpului electric, foarte greu, dacă nu chiar imposibil de obținut pe cale analitică.

Dacă se formează funcția de variabilă complexă

$$Z = f(z) = V + i\psi$$

V și ψ fiind funcții conjugate, se obține o funcție analitică de variabilă complexă. Reamintim că proprietatea fundamentală a unei funcții analitice $f(z)$ este aceea de a admite derivată în orice punct al unui domeniu.

După cum se știe, spunem că $f(z)$ este funcție de variabilă complexă

$$z = x + i\,y, \tag{5.9}$$

definită într-un domeniu D, dacă unei valori a lui z din acest domeniu îi corespunde o valoare a lui $f(z)$; z se numește variabilă independentă, iar D domeniul funcției.

Variabilele complexe se reprezintă în planul complex. În acest scop se aleg două axe dreptunghiulare (fig. 5.6) și o unitate de măsură. Convenim ca variabilei complexe z să-i corespundă punctul M, avînd coordonatele x și y.

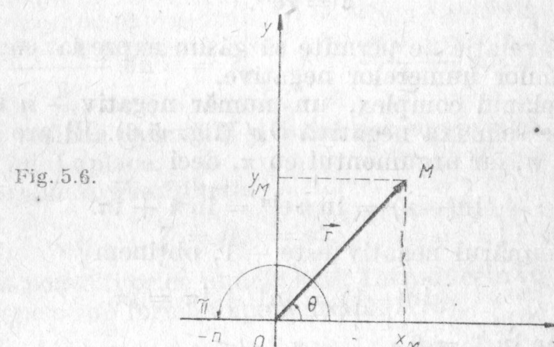


Fig. 5.6.

Punctul $M(x, y)$ se numește imaginea geometrică a numărului complex $z = x + iy$, iar numărul complex z se numește afixul punctului M. Variabilele x și y se numesc respectiv, partea reală și partea imaginară a lui z. Planul Oxy se numește planul complex al variabilei z. Axa Ox se numește axa reală, iar Oy, axa numerelor imaginare. Distanța OM se numește modulul lui z și se notează $|z| = r$. Avem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Unghiul pe care-l face semiaxa Ox cu semidreapta OM, socotit ca în trigonometrie, se numește argumentul lui z. Un număr complex nu se schimbă dacă-i mărim argumentul cu un multiplu de 2π. Numim argument principal al numărului z, unghiul θ pentru care

$$\theta \in [-\pi, \pi].$$

Notînd cu r modulul și cu θ argumentul numărului complex z, putem scrie

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

relații ce ne permit să calculăm pe r și θ în funcție de x și y sau invers. Zero și infinitul unui număr complex au modulele, respectiv 0 și ∞, iar argumentele nedeterminate.

Ținînd seama de (5.9), un număr complex se poate scrie și sub forma trigonometrică,

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

Utilizînd formula lui Euler, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, putem scrie

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{5.10}$$

Această relație ne permite să găsim expresia complexă a logaritmilor numerelor negative.

În planul complex, un număr negativ $-n$ se reprezintă pe semiaxa negativă Ox' (fig. 5.6). El are modulul egal cu n, iar argumentul cu π, deci

$$\ln(-n) = \ln n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \ln n + \mathrm{i}\pi.$$

Dacă numărul negativ este -1, obținem

$$\ln(-1) = \ln 1 + \mathrm{i}\pi = \mathrm{i}\pi,$$

deoarece $\ln 1 = 0$.

Am arătat mai sus cum se formează o funcție de variabilă complexă (analitică), folosind două funcții conjugate V și ψ. Reciproc, se demonstrează că partea reală și cea complexă a oricărei funcții analitice sînt funcții conjugate de y și x și prin urmare satisfac ecuația lui Laplace. Funcțiile analitice ne oferă un mijloc foarte comod de a obține un mare număr de funcții conjugate și deci soluții ale ecuației lui Laplace.

Exemplul 1. Să considerăm funcția

$$Z = f(z) = \sin z.$$

În virtutea formulelor lui Euler pentru valori complexe,

$$\sin z = \sin(x + \mathrm{i}y) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \quad \text{iar} \quad \cos z = \cos(x + \mathrm{i}y) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2},$$

în care dacă facem $x = 0$, obținem

$$\sin \mathrm{i}y = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{2}, \quad \cos \mathrm{i}y = \frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2}.$$

Folosind formula de adunare din trigonometrie, ce se păstrează și pentru numere complexe,

$$f(z) = \sin z = \sin(x + \mathrm{i}y) = \sin x \cos \mathrm{i}y + \cos x \sin \mathrm{i}y,$$

în care, dacă introducem valorile de mai sus, obținem

$$f(z) = \sin z = \frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2}\sin x + \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{2}\cos x. \tag{5.11}$$

Separînd cantitățile reale de cele complexe,

$$X = \frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2}\sin x = V, \quad Y = \frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{2}\cos x = \psi,$$

se poate verifica ușor că V și ψ sînt conjugate și că verifică ecuația lui Laplace.

Exemplul 2. Fie funcția

$$Z = f(z) = z^n, \tag{5.12}$$

în care n poate fi orice număr real. Introducem în această expresie pe z sub forma exponențială (5.10),

$$Z = f(z) = (r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},$$

în care r^n este modulul, iar $n\theta$ argumentul numărului complex. Se poate scrie

$$Z = f(z) = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta).$$

Separînd cantitățile reale de cele complexe, obținem

$$X = r^n\cos n\theta = V, \quad Y = r^n\sin n\theta = \psi. \tag{5.13}$$

Se verifică ușor că aceste relații satisfac condițiile (5.7) și ecuația lui Laplace (5.8), exprimată în coordonate polare.

Astfel, pornind de la o funcție obișnuită, putem ajunge la două funcții $V(x, y)$ și $\psi(x, y)$, conjugate, care sînt ambele soluții ale ecuației bidimensionale a lui Laplace. Construind funcții de variabilă complexă, putem găsi o multitudine de soluții ale ecuației lui Laplace, urmînd a găsi apoi problema fizică potrivită soluției respective.

Se poate demonstra că dacă funcţiile $V(x, y)$ şi $\psi(x, y)$ sînt conjugate în raport cu x şi y, atunci şi x şi y sînt conjugaţi in raport cu V şi ψ.

Într-adevăr, relaţiile

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

conduc la

$$\frac{\partial x}{\partial V} = \frac{\partial y}{\partial \psi} \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial V}.$$

Astfel dacă o reţea reprezentind pe V şi ψ în funcţie de x şi y formează familii de curbe, soluţii ale ecuaţiei lui Laplace şi familiile de curbe ce vor forma reţeaua, reprezentind pe x şi y în funcţie de V şi ψ vor fi la rîndul lor soluţii ale ecuaţiei lui Laplace.

Cînd se întîmpină dificultăţi in ce priveşte obţinerea, explicit prin calcul, a lui x şi y în funcţie de V şi ψ, se pot folosi metode grafice.

Din regulile de derivare a funcţiilor rezultă că se pot obţine noi funcţii conjugate, adunîndu-le cu alte funcţii conjugate sau înmulţindu-le cu numere constante.

De exemplu : $e^x \cos y$ şi $e^x \sin y$ fiind conjugate în raport cu x şi y, în mod asemănător $e^{-x} \cos y$ şi $e^{-x} \sin y$ precum şi semisuma lor

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos y = \text{ch}\, x \cos y \text{ şi } \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sin y = \text{ch}\, x \sin y$$

sînt funcţii conjugate. De asemenea, deoarece valorile lui x şi y sînt conjugate, rezultă că şi funcţiile $x + e^x \cos y$ şi $y + e^x \sin y$ sînt conjugate.

Procedeul cel mai general de a obţine din familii de curbe, alte familii de curbe plane, care să conserve, după transformare, proprietatea de a continua să constituie diferite alte soluţii ale ecuaţiei lui Laplace (în plan) este transformarea conformă. Ea cuprinde de fapt transformările cunoscute din geometria elementară : simetria, omotetia şi, mai ales, inversiunea.

În teoria funcţiilor de variabilă complexă, se arată că acest fel de transformări se realizează folosindu-se funcţiile analitice. Pentru aceasta, în expresiile lui V şi ψ se înlocuiesc variabilele independente, prin alte variabile, ce le

sînt conjugate ; se obţin astfel noi reţele ce se întretaie ortogonal şi ale căror ochiuri sînt la limită, pătrate.

Din punct de vedere geometric, transformarea conformă $Z = f(z)$, $f(z)$ fiind o funcţie analitică, transformă planul variabilei complexe $z = x + iy$, intr-un alt plan $Z = X + iY$ (fig. 5.7). Aceste două planuri sînt în trans-

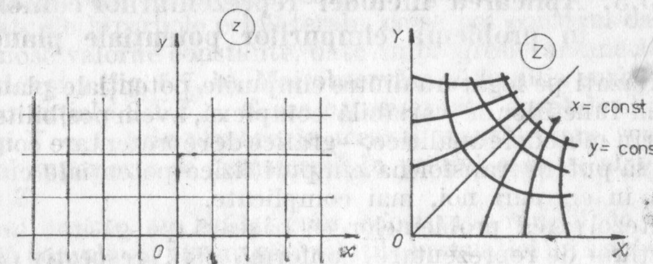


Fig 5.7.

formarea conformă, intotdeauna legate intre ele printr-o funcţie f. Astfel scriind că $Z = f(z)$, facem să corespundă fiecărui punct P din planul z, un punct conform P' în planul Z, fiecărui segment de linie ds să-i corespundă segmentul ds', fiecărei curbe sau figuri geometrice din planul z să-i corespundă o curbă sau o figură conformă cu planul Z. În general, fiecare punct din planul z are o imagine în planul Z.

În aceleaşi condiţii, este clar că şi variabila z este o funcţie de variabila Z, adică putem avea şi o funcţie $z = g(Z)$ care să transforme planul Z în planul z, incit fiecărui punct din planul Z să-i corespundă o imagine în planul z.

Rezumind, se demonstrează in teoria funcţiilor de variabilă complexă că, în transformările conforme, între cele două imagini sînt următoarele legături :

— imaginii dintr-un plan ii corespunde, în celălalt plan, o imagine asemănătoare în cele mai mici detalii, dar deformată în vederea de ansamblu ;

— fiecărui punct, linii sau figuri într-un plan, îi corespund imaginile în celălalt plan ;

— fiecărui unghi cu vîrful în punctul unui plan, îi corespunde un unghi identic, cu vîrful în punctul corespunzător, din celălalt plan ;

— unei rețele de linii echipotențiale și de flux (adică spectrului unui cîmp), trasată într-un plan, îi corespunde în celălalt plan o altă rețea de linii echipotențiale și de flux, care satisface la rîndul ei legea lui Laplace.

5.3. Aplicarea metodei reprezentărilor conforme în problema cîmpurilor potențiale plane

Bazați pe legătura dintre cîmpurile potențiale plane și teoria funcțiilor de variabilă complexă, avem posibilitatea ca prin metodele analitice, — grafice de reprezentare conformă, să putem transforma cîmpuri fizice potențiale cunoscute, în cîmpuri noi, mai complicate.

Rezolvarea problemelor se bazează pe găsirea acelor funcțiuni de reprezentare conformă $f(z)$, respectiv $g(Z)$, care transformă imaginile din una în alta, satisfăcînd însă condițiile marginale (la limită), date pentru fiecare caz în parte.

În aplicațiile ce urmează vom lucra, după caz, în coordonatele carteziene x, y, respectiv X, Y, sau în coordonatele polare r, θ. Pentru fiecare funcție de reprezentare $Z = f(z)$ sau invers $z = g(Z)$, vom obține cîte o rețea potențială, care poate fi considerată spectrul unui nou cîmp fizic potențial, care satisface formula lui Laplace în plan.

Cazurile în care se aplică metoda reprezentărilor conforme în problema cîmpurilor potențiale plane sînt numeroase. La început, pentru a ilustra cele arătate mai sus, vom da următorul exemplu.

Să considerăm în semiplanul superior z rețeaua liniilor echipotențiale $y = C$ și a liniilor de flux $x = C'$ (fig. 5.7, a) și funcția de transformare

$$Z = z^{1/2}. \tag{5.14}$$

Pentru planul Z, obținem

$$Z^2 = z,$$

de unde

$$(X + \mathrm{i}\,Y)^2 = x + \mathrm{i}\,y$$

sau

$$X^2 - Y^2 + 2\,\mathrm{i}XY = x + \mathrm{i}y.$$

Separînd partea reală de partea imaginară, se va obține în planul Z, pentru liniile echipotențiale

$$y = 2XY = C,$$

iar pentru liniile de flux

$$x = X^2 - Y^2 = C'.$$

Familiile de curbe, ce reprezintă în planul Z liniile echipotențiale, se verifică ușor că sînt exprimate prin funcții conjugate, deci se intersectează ortogonal. Ambele sînt formate de hiperbole echilaterale, ce se pot construi dacă se cunosc valorile constante, date în progresie aritmetică, ale lui x și y (fig. 5.7, b). Mai observăm că familia curbelor echipotențiale $2XY = C$ are ca asimptote dreptele $X = 0$ și $Y = 0$, prin urmare, în această transformare, semiplanul superior z se transformă în primul cadran al planului Z.

Mai înainte, am arătat cum, construind funcții de variabilă complexă, putem găsi soluții ale ecuației lui Laplace în plan, urmînd ca după aceea să căutăm căror probleme de fizică le corespund soluțiile respective. Această metodă este foarte folositoare, întrucît ea a permis rezolvarea multor probleme privind cîmpurile potențiale plane. Ea prezintă însă neajunsul că se merge oarecum la întîmplare, conducînd adesea la soluții deja cunoscute sau cărora nu le corespund nici un fel de probleme fizice reale. Se pune de aceea problema inversă, care în general este insolubilă, de a rezolva ecuația lui Laplace pentru un sistem fizic ales în prealabil. În cazul particular, cînd sistemul fizic se reduce la un poligon, se poate ajunge la rezultate interesante folosind metoda transformărilor conforme a lui Schwartz-Christoffel. Avantajele acestei metode sînt totuși destul de limitate, impunînd totodată și ample dezvoltări analitice, de aceea nu o vom folosi în cele ce urmează.

5.4. Studiul unor cîmpuri electrostatice plane particulare

5.4.1. Cîmpul electrostatic produs de o dreaptă infinită, încărcată electric uniform

Vom nota cu q densitatea liniară de sarcină electrică. Din cauza simetriei, liniile de cîmp vor fi perpendiculare pe dreaptă.

Pentru a determina intensitatea $\vec{E}$ a cîmpului într-un punct la distanța r de dreapta încărcată electric, vom presupune o suprafață de forma ariei laterale a unui cilindru

circular cu înălțimea egală cu unitatea, de rază r şi coaxial cu dreapta. Conform legii lui Gauss, fluxul ce străbate acest cilindru va fi

$$\psi = \frac{q}{\varepsilon} = 2\pi r E, \quad \text{de unde} \quad E = \frac{q}{2\pi\varepsilon r}.$$

Vectorul intensitate a cîmpului electrostatic fiind perpendicular pe dreapta respectivă, putem scrie

$$\mathrm{d}V = -E\,\mathrm{d}r = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{r},$$

încît potențialul dintr-un punct, la distanța r de dreapta încărcată va fi

$$V = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln r + C = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r} + C. \qquad (5.15)$$

Se observă că potențialul scade logaritmic cu cît ne îndepărtăm de fir, iar suprafețele echipotențiale sînt cilindri coaxiali cu firul, C fiind o constantă arbitrară, ce se determină prin condițiile la limită, impuse potențialului.

Dacă firul are raza egală cu r şi potențialul V, înlocuind una dintre suprafețele echipotențiale de rază r_1 cu o suprafață conductoare, diferența de potențial $V - V_1$ dintre cele două suprafețe va fi

$$V - V_1 = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\int_{r_1}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r}{r_1} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_1}{r}.$$

Sistemul respectiv formează un condensator cilindric avînd razele r şi r_1, pe care le considerăm suficient de mici față de lungimea l a condensatorului, pentru a se evita influența perturbatoare a extremităților. Capacitatea unui asemenea condensator, conform (4.12), va fi

$$C = \frac{q}{V - V_1} = \frac{ql}{\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_1}{r}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{r_1}{r}}.$$

Revenind la relația (5.15), curbele echipotențiale, rezultate din intersecția suprafețelor echipotențiale din jurul firului încărcat electric, vor forma o familie de cercuri

concentrice. Expresia potențialului în coordonate polare se mai poate scrie

$$V = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln r.$$

Familia curbelor ce reprezintă funcția de flux a liniilor de cîmp se obține din (5.15). Pentru aceasta impunem condițiile (5.7),

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}; \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}.$$

Pentru determinarea lui ψ, trebuie integrată diferențiala totală

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\partial\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\mathrm{d}r + r\frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}\theta,$$

de unde

$$\psi(r, \theta) = \int_{r_0}^{r} -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\mathrm{d}r + \int_{\theta_0}^{\theta} r\frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}\theta + C.$$

Avînd în vedere (5.15), integrala se reduce la

$$\psi(r, \theta) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\int_{0}^{\theta}\mathrm{d}\theta + C = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\theta + C. \qquad (5.16)$$

Se poate verifica uşor că funcțiile $V = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln r$ şi $\psi = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\cdot\theta$, astfel calculate, sînt conjugate, deoarece îndeplinesc condițiile (5.7). Ele corespund funcției de variabilă complexă

$$f(z) = V + \mathrm{i}\psi = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}(\ln r + \mathrm{i}\theta) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) =$$

$$= -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln z. \qquad (5.17)$$

Liniile echipotențiale ale acestui cîmp sînt cercuri concentrice de rază r și, întrucît razele corespund liniilor de cîmp, ele au fost reprezentate în figura 5.8 numai în semiplanul superior. Valorile lui r și θ, folosite la construcția figurii 5.8, s-au calculat din expresiile lui $V = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln r$

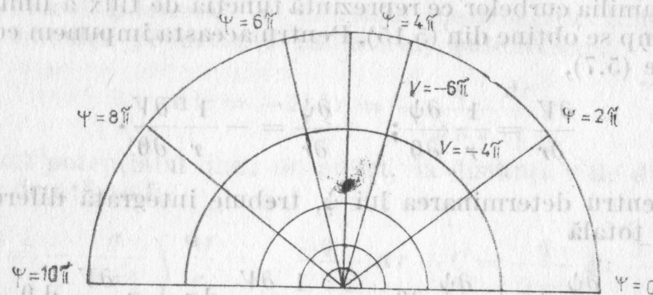


Fig. 5.8.

și $\psi = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\theta$. Deși lui V și ψ li s-au dat valori în progresie aritmetică și $\frac{q}{2\pi\varepsilon} \simeq 10$, acest fapt nu influențează generalitatea problemei.

Cîmpul fiind plan, putem să permutăm pe V (cu semn schimbat) pentru a fi îndeplinite condițiile (5.7) cu ψ, obținînd

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\theta \quad \text{și} \quad \psi = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln r, \tag{5.18}$$

care exprimă funcția potențială, respectiv cea de flux, a unui cîmp electrostatic, format în interiorul unui unghi diedru θ, ale cărui semiplane se găsesc respectiv la potențiale V și zero.

Pentru a afla intensitatea cîmpului electrostatic în interiorul unghiului diedru, este necesar să determinăm intensitatea cîmpului, dată de relațiile (5.6), în funcție de coordonatele polare. Pentru obținerea acestui lucru trebuie să exprimăm derivatele parțiale ale lui V, care sînt funcții de x și y, cu ajutorul coordonatelor polare r și θ. Avînd în vedere că

$$x = r\cos\theta \quad \text{și} \quad y = r\sin\theta,$$

se obține

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial V}{\partial y}\sin\theta$$

și

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\frac{\partial V}{\partial x}\sin\theta + r\frac{\partial V}{\partial y}\cos\theta$$

Rezolvînd acest sistem de două ecuații în raport cu $\frac{\partial V}{\partial x}$ și $\frac{\partial V}{\partial y}$, obținem

$$-E_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\sin\theta,$$

$$-E_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\cos\theta.$$

Din (5.6) rezultă

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2}.$$

Ținînd seama de expresia lui V din relațiile (5.18), obținem, în cele din urmă,

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}.$$

Prin urmare, într-un punct oarecare dintre cele două semiplane, $\frac{q}{2\pi\varepsilon}$ fiind constant, intensitatea cîmpului este invers proporțională cu distanța de la punctul în care se calculează intensitatea cîmpului electric pînă la muchia unghiului diedru. Notînd cu V și cu θ potențialul semiplanului și respectiv mărimea unghiului diedru, avînd în vedere (5.18), putem scrie

$$E = \frac{V}{\theta}\frac{1}{r}.$$

Tot astfel, densitatea de sarcină superficială pe suprafaţa laturilor unghiului diedru este, conform teoremei lui Coulomb (§ 5.1),

$$\sigma = \varepsilon E.$$

5.4.2. Cîmpul unui plan infinit încărcat electric

Considerăm o suprafaţă plană, infinită, avînd densitate superficială de sarcină constantă σ. Pentru a calcula intensitatea cîmpului electric într-un punct P(fig. 5.9) vom

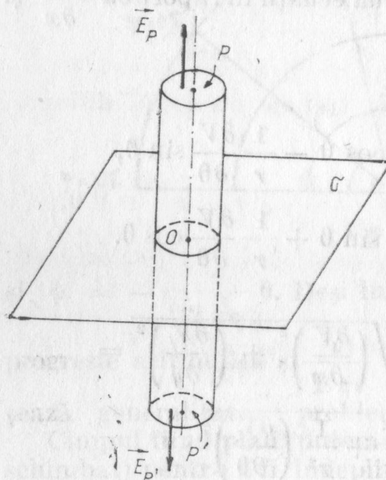


Fig. 5.9.

construi un cilindru cu punctul P de o parte a planului, iar punctul P' de cealaltă parte a sa. Fluxul ce străbate cilindrul trece numai prin bazele cilindrului de arie A, deoarece intensitatea cîmpului şi generatoarele cilindrului sînt paralele. Dacă notăm cu $\bar{E}_p$ intensitatea cîmpului în punctul P şi cu $\bar{E}_{p'}$ intensitatea cîmpului în punctul P', fluxul respectiv va fi

$$A\,E_p + A\,E_{p'} = 2\;A\,E_p,$$

deoarece $E_p = E_{p'}$. Sarcina inchisă de suprafaţa cilindrului este σA, deci în conformitate cu teorema lui Gauss, $2\;AE_p = \frac{\sigma A}{\varepsilon}$, de unde $E_p = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon}$. Cîmpul fiind uniform, spectrul său este format dintr-o reţea de drepte perpendiculare şi echidistante.

5.4.3. Cîmpul produs de două plane paralele şi infinite, încărcate electric cu semne contrare

Aplicînd şi în acest caz teorema lui Gauss, construind un cilindru care include cele două plane, ca în figura 5.10, a, se vede uşor cum cîmpul este zero în afara celor două plane. Considerînd o cutie ce închide numai cîte una dintre supra-

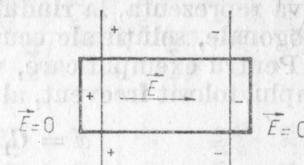
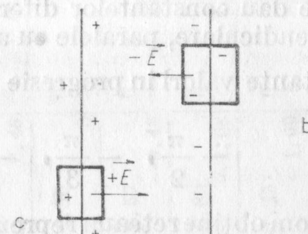


Fig. 5.10.



feţe, ca în figurile 5.10, b şi c, se poate vedea cum cîmpul dintre cele două plane trebuie să fie de două ori mai mare decît pentru un singur plan,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

De asemenea, între cele două plane cîmpul este uniform, iar spectrul său este format dintr-o reţea de drepte rectangulare.

5.4.4. Transformarea definită de funcţia analitică $Z = \sin z$

Avînd în vedere (5.11), această funcţie variabilă complexă se poate scrie

$$Z = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x + i\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x,$$

ceea ce conduce la transformarea

$$X = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x \quad \text{și} \quad Y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x, \qquad (5.19)$$

unde X și Y sînt funcții conjugate. Dacă în planul z, vom înscrie o rețeadecurbe ortogonale, reprezentînd două funcții conjugate, cu ajutorul funcțiilor (5.19), rețeaua respectivă va putea fi transformată în planul Z, în altă rețea, ce va reprezenta, la rîndul ei, alte două familii de curbe ortogonale, soluții ale ecuației lui Laplace.

Pentru exemplificare, vom considera în planul z cazul simplu, folosit frecvent, al funcțiilor

$$x = C_1, \qquad y = C_2,$$

care, evident, sînt funcții conjugate. Ele reprezintă, dacă se dau constantelor diferite valori, o rețea de drepte perpendiculare, paralele cu axele Ox și Oy. Dînd acestor constante valori în progresie aritmetică cu rația $\frac{\pi}{6}$,

$$-\frac{\pi}{2}, \ -\frac{\pi}{3}, \ -\frac{\pi}{6}, \ 0, \ \frac{\pi}{6}, \ \frac{\pi}{3}, \ \frac{\pi}{2}, \qquad (5.20)$$

vom obține rețeaua reprezentată în planul z prin figura 5.11, a. Dacă introducem pe rînd în formulele (5.19) aceste numere, obținem pentru X și Y valorile înscrise în tabelul 5.1. Cu ajutorul acestor valori am construit liniile echipotențiale și de cîmp, în care se transformă în planul Z rețeaua de drepte din planul z (fig. 5.11, b). Această metodă

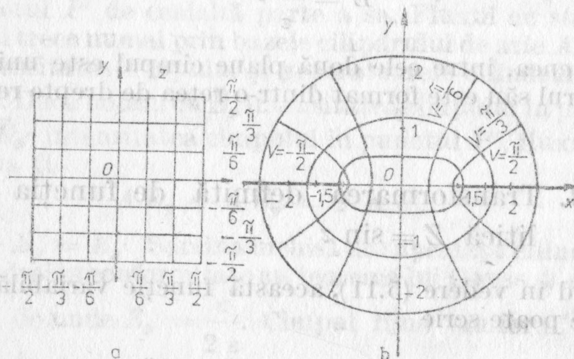


Fig. 5.11.

Tabelul 5.1

y		x: $-\frac{\pi}{2}$ X_1	Y_1	$-\frac{\pi}{3}$ X_2	Y_2	$-\frac{\pi}{6}$ X_3	Y_3	0 X_4	Y_4	$\frac{\pi}{6}$ X_5	Y_5	$\frac{\pi}{3}$ X_6	Y_6	$\frac{\pi}{2}$ X_7	Y_7
$\frac{\pi}{2}$	X^1 Y^1	−2,51	0	−2,17	1,15	−1,25	1,99	0	2,30	1,25	1,99	2,17	2,30	2,51	0
$\frac{\pi}{3}$	X^2 Y^2	−1,60	0	−1,39	0,62	−0,80	1,08	0	1,25	0,80	1,08	1,39	0,62	1,60	0
$\frac{\pi}{6}$	X^3 Y^3	−1,14	0	−0,99	0,27	−0,57	0,48	0	0,55	0,57	0,48	0,99	0,27	1,14	0
0	X^4 Y^4	−1,00	0	−0,87	0	−0,50	0	0	0	0,50	0	0,87	0	1,00	0
$-\frac{\pi}{6}$	X^5 Y^5	−1,14	0	−0,99	−0,27	−0,57	−0,48	0	−0,55	0,57	−0,48	0,99	−0,27	1,14	0
$-\frac{\pi}{3}$	X^6 Y^6	−1,60	0	−1,39	−0,62	−0,80	−1,08	0	−1,25	0,80	−1,08	1,39	−0,62	1,60	0
$-\frac{\pi}{2}$	X^7 Y^7	−2,51	0	−2,17	−1,15	−1,25	−1,99	0	−2,30	1,25	−1,99	2,17	−2,30	2,51	0

grafică este generală, putîndu-se aplica și în cazuri mai complicate, cînd în loc de $x = C_1$ și $y = C_2$, rețeaua din planul Z reprezintă două familii de curbe $f_1(x, y) = C_1$ și $f_2(x, y) = C_2$ conjugate. Din aceste funcții nu se pot obține, prin metode elementare, ca în cazurile de mai înainte, expresiile lui x și y, în funcție de C_1 și C_2, pentru a putea folosi apoi relațiile de transformare (5.19).

Metoda constă, în fond, în construcția „prin puncte" a rețelei (transformate) din planul Z, în care perechile de numere $X_1^1\, Y_1^1, X_2^1 Y_2^1 \ldots, X_1^2 Y_1^2 \ldots$ din tabelul 5.1 înscrise în linii reprezintă, din punct de vedere fizic, cum vom arăta mai jos, punctele ce servesc la construcția liniilor de cîmp, iar cele din coloane, la construcția curbelor echipotențiale. Această metodă este suficient de exactă și de expeditivă, dacă pentru efectuarea calculelor se folosește un minicalculator electronic.

În cazul exemplului nostru, transformarea se poate obține ușor și pe cale analitică. Pentru aceasta, vom elimina întîi pe x și apoi pe y din ecuațiile (5.19), folosind relațiile

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1\,; \quad \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 = 1$$

și obținem

$$\frac{X^2}{\sin^2 x} - \frac{Y^2}{\cos^2 x} = 1; \quad \frac{X^2}{\left(\dfrac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\dfrac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2} = 1. \tag{5.21}$$

Rezultă că dreptele $x = C_1$ și $y = C_2$ din planul z, se transformă în planul Z, în hiperbole și respectiv în elipse omofocale. Va fi suficient să introducem în relațiile (5.21), pe rînd, valorile din șirul (5.20) pentru a trasa rețeaua acestor curbe, în planul Z.

Problema fizică ce corespunde acestei transformări este acum simplă. Vom considera două plane verticale conductoare și infinite, încărcate uniform cu sarcini egale și de semn contrar la potențialele $-\dfrac{\pi}{2}$ și $\dfrac{\pi}{2}$, între care, după cum s-a arătat în paragraful precedent, se formează un cîmp uniform. În planul z, intersecția acestor plane,

cu planul z, sînt dreptele $x_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ și $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$, paralele cu axa Oy, care sînt linii echipotențiale, la fel ca și toate dreptele paralele cuprinse între ele. Liniile de cîmp sînt perpendiculare pe acestea. Astfel cum sînt trasate în figura 5.11, a, ele reprezintă spectrul cîmpului plan, format între două plane, infinite, uniform încărcate cu sarcini de semn contrar. Prin transformarea conformă, obținută cu ajutorul relațiilor (5.19), respectiv (5.21), liniile echipotențiale au fost transformate în hiperbole, iar liniile de cîmp în elipse omofocale.

Fiecare dintre liniile echipotențiale poate fi materializată, menținînd-o la același potențial. Vom materializa semidreptele $V = -\dfrac{\pi}{2}$ și $V = \dfrac{\pi}{2}$, în care au degenerat în planul Z, hiperbolele din care au provenit dreptele $x_1 = -\dfrac{\pi}{2}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$ din planul z (fig. 5.11, b).

Cum în această transformare sînt respectate condițiile la limită, iar spectrul este format dintr-o rețea de curbe reprezentînd soluții ale ecuației lui Laplace, soluția găsită este unică. Ea reprezintă cîmpul ce se formează, dacă într-un plan infinit se practică o fantă largă, iar semiplanele rezultate sînt încărcate cu sarcini electrice egale și de semn contrar.

5.5. Studiul unor cîmpuri plane în electrocinetică

5.5.1. Introducere

Dacă între două armături, menținute la potențial constant, se introduce un fluid bun conductor electric, purtătorii de sarcini din interiorul fluidului se vor deplasa sub influența cîmpului electrostatic.

Între particulele de fluid încărcate și moleculele neutre existente în fluid se vor dezvolta forțe de frecare, proporționale cu viteza și suficient de importante pentru a anihila forțele inerțiale. În aceste condiții, vitezele sarcinilor electrice vor fi proporționale cu cîmpul accelerator, iar potențialul forțelor devine în același timp și potențial de viteze; fluxului de forțe i se va suprapune fluxul electric, ambele fiind descrise prin formule identice.

Experiența dovedește că aceste ipoteze sînt valabile atît pentru conductorii electrolitici cît și pentru cei metalici.

Dacă notăm cu V potențialul (forțelor sau vitezelor) și prin ψ fluxul (de forță sau de curent), prin X și Y componentele densității curentului, pentru un lichid avînd conductanța egală cu unitatea, în cazul cîmpului plan, vom avea relațiile

$$-X = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad -Y = \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Rețeaua liniilor de curent și a celor de potențial va avea ochiurile elementare pătrate și toate soluțiile găsite în electrostatică, pot fi folosite și în electrocinetică, dacă înlocuim noțiunea de linie de cîmp prin linie de curent.

Astfel, dacă într-un vas metalic cilindric, umplut cu un lichid conductor, vom introduce în axul său un fir metalic și vom stabili între vas și fir o diferență de potențial, liniile echipotențiale și de curent se vor prezenta ca în figura 5.8 (evident, dacă se completează figura prin simetrie).

Pentru un mediu conductor, calculul rezistenței în electrocinetică este simplu. Pentru aceasta, între două suprafețe echipotențiale foarte apropiate, considerăm două elemente corespondente, de suprafață S. Capacitatea lor este

$$C = \frac{\varepsilon S}{l},$$

în care C — capacitatea, în farazi; ε — permitivitatea absolută a mediului dintre armături, în F/m; S — suprafața elementului, în m²; l — distanța dintre cele două elemente, în m. Rezistența mediului va fi

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

în care R — rezistența, în Ω, ρ — rezistivitatea, în $\Omega \cdot$m. Din cele două relații deducem

$$CR = \varepsilon\rho.$$

Conductanța $\frac{1}{R}$ este deci proporțională cu capacitatea.

Astfel, rezistența electrică a lichidului în care se introduce un sistem de doi conductori menținuți la potențiale diferite se poate calcula prin relația următoare, atunci cînd se cunoaște capacitatea sistemului de conductori,

$$R = \frac{\varepsilon\rho}{C}. \qquad (5.22)$$

De exemplu, am calculat capacitatea unui condensator cilindric de lungime l avînd respectiv razele r_1 și r ($r < r_1$),

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{r_1}{r}}.$$

Rezultă că rezistența lichidului conductor (în curent continuu), de rezistivitate ρ, ce se introduce în spațiul dintre cei doi cilindri ce formează armăturile condensatorului este

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{r_1}{r}.$$

Ținînd seama de cele expuse la începutul acestui paragraf, vom continua în electrocinetică studiul unor cîmpuri, soluții ale ecuației lui Laplace, în plan.

5.5.2. Cîmpul electrostatic produs de două fire paralele, avînd densități liniare de sarcină egale și de semn contrar

Cîmpul electrostatic, produs de o sarcină liniară uniformă, ce se găsește în originea axelor de coordonate, poate fi exprimat prin funcția de variabilă complexă (5.17),

$$f(z) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln z.$$

Dacă sarcina se găsește într-un punct oarecare din planul complex de afix z_e, noua expresie a cîmpului se obține printr-o translație a axelor de coordonate (fig. 5.12),

$$f(z) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln(z - z_e).$$

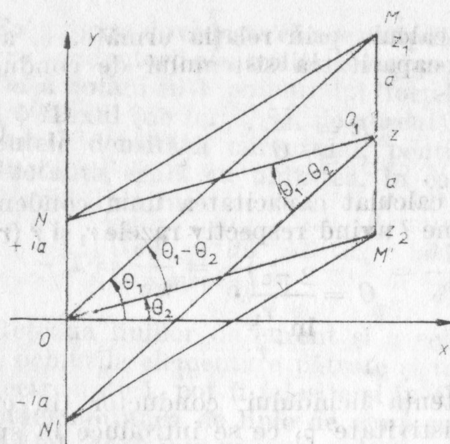


Fig. 5.12.

Dacă sarcina se va găsi pe axa Oy, avînd afixul $\mathrm{i}a$, cîmpul va fi reprezentat prin relația

$$f_1(z) = -\frac{q}{2\,\pi\varepsilon}\ln(z - \mathrm{i}\,a),$$

iar cîmpul produs de sarcina egală și de semn contrar, așezată simetric față de originea axelor de coordonate cu afixul $-\mathrm{i}a$, va fi

$$f_2(z) = \frac{q}{2\,\pi\varepsilon}\ln(z + \mathrm{i}a).$$

Știind că prin însumarea a două sau mai multor funcții conjugate se obține tot o funcție conjugată, cîmpul rezultat din suprapunerea cîmpurilor produse de ambele sarcini este

$$f(z) = f(z_1) + f(z_2) = \frac{q}{2\,\pi\varepsilon}[\ln(z + \mathrm{i}a) - \ln(z - \mathrm{i}\,a)] =$$

$$= \frac{q}{2\,\pi\varepsilon}\ln\frac{z + \mathrm{i}\,a}{z - \mathrm{i}\,a}$$

sau

$$f(z) = \frac{q}{2\,\pi\varepsilon}\ln\frac{x + \mathrm{i}(y + a)}{x - \mathrm{i}(y - a)} = \frac{q}{2\,\pi\varepsilon}\ln\frac{z_1}{z_2} =$$

$$= \frac{q}{2\,\pi\varepsilon}\ln\frac{r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}, \qquad (5.23)$$

în care

$$z_1 = x + \mathrm{i}(y + a), \qquad z_2 = x + \mathrm{i}(y - a),$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y + a)^2}, \qquad r_2 = \sqrt{x^2 + (y - a)^2}$$

și

$$\theta_1 = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y + a}{x}, \qquad \theta_2 = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y - a}{x}.$$

Rezultă că relația (5.23) se scrie

$$f(z) = \frac{q}{2\,\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2} + \mathrm{i}(\theta_1 - \theta_2)\right].$$

Separînd partea reală de cea complexă, obținem pentru funcțiile potențial și de flux, relațiile

$$V = \frac{q}{2\,\pi\varepsilon}\,\frac{1}{2}\ln\frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2}, \qquad (5.24)$$

$$\psi = \frac{q}{2\,\pi\varepsilon}(\theta_1 - \theta_2). \qquad (5.25)$$

Curbele echipotențiale se obțin făcînd $V = C$, în care C este o constantă care primește diferite valori în progresie aritmetică.

Dacă funcția V din (5.24) este constantă, rezultă că

$$\frac{x^2 + (y + a)^2}{x^2 + (y - a)^2} = C_1,$$

C_1 fiind o altă constantă ce se poate deduce din C. Această expresie reprezintă familia de cercuri

$$x^2 + y^2 - 2a\,\frac{C_1 + 1}{C_1 - 1}\,y + a^2 = 0.$$

Deci liniile echipotențiale vor fi reprezentate printr-o familie de cercuri cu centrele pe Oy, a căror poziție este dată de relația

$$y_1 = a\,\frac{C_1 + 1}{C_1 - 1} \qquad (5.26)$$

și avînd razele egale cu

$$r_1 = a\sqrt{\left(\frac{C_1+1}{C_1-1}\right)^2 - 1} = 2a\frac{\sqrt{C_1}}{C_1-1}. \qquad (5.27)$$

Familia curbelor ce reprezintă liniile de cîmp se exprimă prin

$$\psi = \frac{q}{2\pi\varepsilon}(\theta_1 - \theta_2) = C',$$

unde C' este, de asemenea, o constantă. Prin urmare, $\theta_1 - \theta_2 = C_2$ este tot o constantă, exprimată în radiani.

Pentru a înțelege semnificația acestor constante, luăm în planul complex z (fig. 5.12), punctele M, M' și O_1, care sînt imaginile lui z, z_1 și z_2, argumentele lui z_1 și z_2 fiind θ_1 și θ_2. Observăm că $\theta_1 - \theta_2$ este egal cu unghiul $\widehat{MOM'}$. Construind paralelogramul $NMM'N'$, se demonstrează ușor că triunghiurile NO_1N' și MOM' sînt egale și ca o consecință, $\widehat{MOM'} = \widehat{NO_1N'} = \theta_1 - \theta_2 = C_2$. Prin urmare, liniile de cîmp sînt locul geometric al punctelor din care segmentul NN' se vede sub un unghi dat. De unde, urmează că liniile de cîmp sînt o familie de arce de cerc (fig. 5.13), cu centrele pe axa numerelor reale. Aceste arce de cerc trec

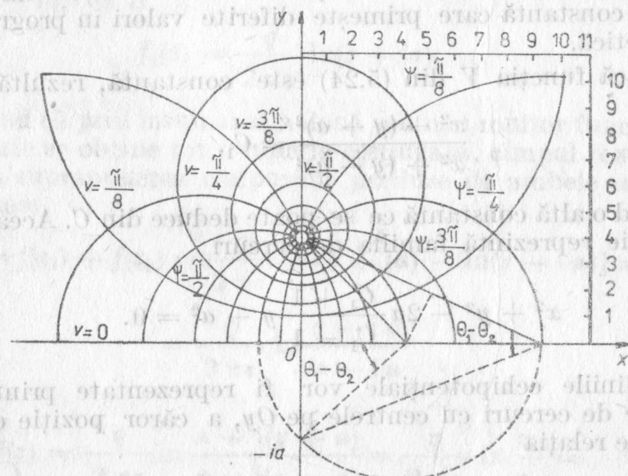


Fig. 5.13.

prin punctele de afix ia și $-ia$, avînd coordonatele centrelor date de relația

$$x_2 = \frac{a}{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{a}{\operatorname{tg}C_2}, \qquad (5.28)$$

razele lor fiind egale cu

$$r_2 = \frac{a}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{a}{\sin C_2}. \qquad (5.29)$$

Pentru a trasa curbele echipotențiale și liniile de cîmp, vom da valori, în progresie geometrică cu aceeași rație, funcției potențiale V (5.24) și celei de flux ψ (5.25), egalate cu constantele C și C',

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\,\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\,\frac{1}{2}\ln C_1 = C, \qquad (5.30)$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y+a}{x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y-a}{x}\right) = $$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{q}{2\pi\varepsilon}C_2 = C'.$$

Din aceste relații vom calcula constantele C_1 și C_2, care, introduse în (5.26), (5.27) (5.28) și (5.29), ne vor da posibilitatea, în cele din urmă, de a calcula pozițiile centrelor și mărimile razelor cercurilor ce reprezintă curbele echipotențiale și de cîmp.

Pentru simplificare, luăm $\frac{q}{2\pi\varepsilon} = 1$, iar rația progresiei aritmetice o vom lua egală cu $\pi/8$, înscriind rezultatele în tabelul 5.2. Cu datele obținute din acest exemplu, luînd $a = 4$, am construit rețeaua de cercuri din figura 5.13, reprezentînd cîmpul în semiplanul superior, cîmpul produs în semiplanul inferior fiindu-i simetric.

În figura 5.13 am reprezentat și liniile de curent și curbele echipotențiale ce iau naștere între un plan conductor infinit și un conductor cilindric paralel, între care se stabilește o diferență de potențial, aflate într-un mediu conductor nelimitat.

Aceeași figură 5.13, completată prin simetrie, va reprezenta, în aceleași condiții, liniile de curent și curbele echipotențiale ce iau naștere între doi conductori cilindrici paraleli, a căror rază este mică în raport cu distanțele dintre ei.

Tabelul 5.2

$C = V$	C_1	$\frac{y_1}{a}$	$\frac{r_1}{a}$	$\psi = C' = C_2$	$\frac{x_2}{a}$	$\frac{r_2}{a}$
0	1,00	∞	∞	0	∞	∞
$\frac{\pi}{8}$	2,19	2,69	2,48	$\frac{\pi}{8}$	2,41	2,61
$\frac{\pi}{4}$	4,81	1,52	1,15	$\frac{\pi}{4}$	1,00	1,41
$3\frac{\pi}{8}$	10,55	1,21	0,68	$3\frac{\pi}{8}$	0,41	1,08
$\frac{\pi}{2}$	23,14	1,09	0,43	$\frac{\pi}{2}$	0	1,00
$5\frac{\pi}{8}$	50,75	1,04	0,28	$5\frac{\pi}{8}$	−0,41	1,08
$3\frac{\pi}{4}$	113,32	1,01	0,19	$3\frac{\pi}{4}$	−1,00	1,41
$7\frac{\pi}{8}$	244,15	1,01	0,12	$7\frac{\pi}{8}$	−2,41	2,61
π	535,49	1,00	0,09	π	$-\infty$	∞

În tabelul 5.2 se observă că C_1 crește foarte repede o dată cu creșterea potențialului, încît pentru valori apreciabile ale potențialului, avem

$$C_1 - 1 \simeq C_1,$$

iar relația (5.27) devine

$$r_1 \simeq 2a\frac{\sqrt{C_1}}{C_1}, \quad \text{de unde} \quad C_1 \simeq \frac{4a^2}{r_1^2}.$$

Introducind expresia lui C_1 în relația (5.30), putem evalua potențialul

$$V \simeq \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2a}{r_1}. \tag{5.31}$$

Dacă raza r_1 a cercurilor echipotențiale este suficient de mică, centrele lor se confundă cu punctele a și $-a$. Ținînd seama de faptul că putem materializa orice suprafață echipotențială printr-o suprafață conductoare, fără ca structura cîmpului să se schimbe, relația (5.31) exprimă potențialul unui conductor liniar, de rază r_1, mică în raport cu distanța a pînă la un plan conductor paralel, aflat la potențialul zero. Deoarece q este sarcina pe unitatea de lungime, notînd cu l lungimea conductorului, sarcina electrică de pe întreg conductorul este

$$Q = ql,$$

iar capacitatea condensatorului format din conductor și planul conductor, conform relației (4.12) este

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{ql}{\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2a}{r}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{2a}{r_1}}.$$

Cu această relație se poate calcula, de exemplu, capacitatea unei linii electrice aeriene, așezată paralel cu pămîntul.

Doi conductori cilindrici paraleli, avînd razele r_1, mici în raport cu distanța $d = 2a$ dintre ei, încărcați cu sarcini electrice egale și de semn contrar, vor avea potențialele

$$V_1 \simeq \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_1}, \qquad V_2 \simeq -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_1},$$

iar diferența de potențial,

$$V_1 - V_2 \simeq \frac{q}{\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_1}.$$

Dacă notăm cu l lungimea conductorilor, capacitatea lor va fi

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{ql}{\frac{q}{\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_1}} = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln\frac{d}{r_1}}.$$

Dacă între acești conductori se menține o diferență de potențial, și-i introducem într-un lichid bun conductor electric, avînd practic un volum nelimitat în raport cu dimensiunile conductorilor, curentul electric ce ia naștere în lichid va avea rezistența (5.22)

$$R = \frac{\varepsilon \rho}{C} = \frac{\rho}{\pi l} \ln \frac{d}{r_1}.$$

Notînd cu U tensiunea electrică dintre cei doi conductori, intensitatea curentului din fluid va fi

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\pi l U}{\rho \ln \frac{d}{r_1}}.$$

5.5.3. Transformarea $Z = f(z) = z^n$ în care n poate fi orice număr real

Am văzut că expresia (5.12) este o funcție analitică. Prin urmare, prin transformări conforme, o putem folosi la obținerea altor cîmpuri, din cîmpuri fizice cunoscute. Astfel am procedat pentru cîmpul reprezentat în figura 5.11. Formulele de transformare, pentru descrierea noilor curbe echipotențiale și linii de cîmp sînt relațiile (5.13). Aceste relații au o interpretare geometrică simplă. Ele servesc la obținerea transformărilor respective prin construcții geometrice. Fie cele două plane z și Z (fig. 5.14), în

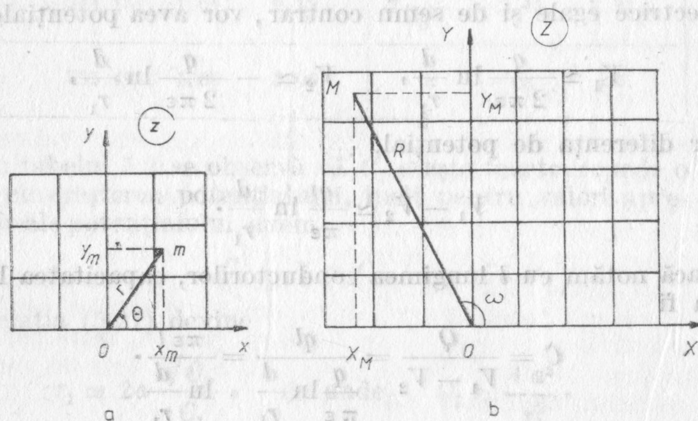


Fig. 5.14.

care s-au trasat două rețele dreptunghiulare cu ochiuri pătrate, avînd laturile egale cu unitatea. Făcînd transformarea, observăm că unui punct m din planul z, avînd modulul r și argumentul θ, ținînd seama de relațiile (5.13), îi va corespunde în planul Z, un punct M, avînd modulul $R = r^n$ și argumentul $\omega = n\theta$.

Drept exemplu, vom lua cazul particular al transformării $Z = z^2$, care se poate rezolva ușor prin calcul. În această transformare, vom considera în planul z curbele echipotențiale $x = \text{const}$, iar liniile de cîmp $y = \text{const}$, ceea ce corespunde cîmpului format de două plane verticale infinite, între care se stabilește o diferență de potențial.

În coordonate carteziene, obținem în planul z (fig. 5.14)

$$x = r \cos\theta \; ; \; y = r \sin\theta,$$

iar în planul Z,

$$X = R \cos\omega = r^2 \cos 2\theta \; ; \quad Y = R \sin\omega = r^2 \sin 2\theta.$$

Deoarece

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \text{și} \quad \sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta,$$

rezultă

$$X = x^2 - y^2; \qquad Y = 2xy.$$

Eliminînd pe rînd din acest sistem de ecuații pe x și y, obținem

$$Y^2 - 4y^2 X - 4y^4 = 0, \quad Y^2 + 4x^2 X - 4x^4 = 0.$$

Dînd lui x și y valori constante în progresie aritmetică, cu aceeași rație, obținem în planul Z două familii de parabole ortogonale, în care s-a transformat rețeaua de drepte din planul z (fig. 5.15).

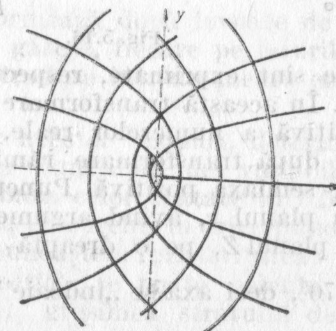


Fig. 5.15.

Prin această transformare se obţine distribuţia liniilor de curent (şi a curbelor echipotenţiale) produse de un semiplan vertical, aşezat la dreapta la infinit, deasupra axei Ox. Aceste linii ajung, după ce înconjoară un semiplan izolant orizontal, la un alt semiplan vertical, aşezat la dreapta, la infinit, sub axa Ox. Cele două semiplane între care se stabileşte o diferenţă de potenţial, se găsesc într-un mediu bun conducător de electricitate.

5.5.4. Transformarea $Z = f(z) = z^{3/2}$

Această transformare este un alt caz al transformării $f(z) = z^n$.

În această situaţie, fiecărui punct din planul z îi va corespunde în planul Z cîte un punct avînd modulul $R = r^{3/2}$ şi argumentul $\omega = \frac{3}{2}\,\theta$.

Vom efectua această transformare, operînd asupra cîmpului uniform, reprezentat în figura 5.16 printr-o reţea de drepte ortogonale, în care liniile de cîmp şi cele

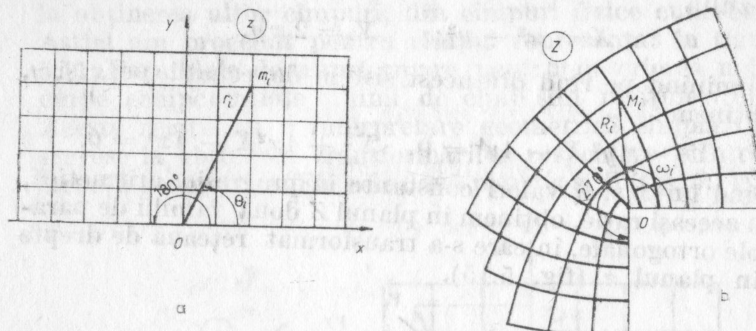


Fig. 5.16.

echipotenţiale sînt exprimate, respectiv prin y = const şi x = const. În această transformare, orice punct de pe semiaxa pozitivă a numerelor reale, avînd argumentul egal cu zero, după transformare rămîne în planul Z, de asemenea, pe semiaxa pozitivă. Punctele de pe semiaxa negativă din planul z, avînd argumentul egal cu 180°, vor trece în planul Z, pe o dreaptă care face un unghi $\frac{3}{2} \cdot 180 = 270°$, deci axa se „îndoaie" cu un unghi de 90° (fig. 5.16, b).

Pentru a determina liniile de cîmp şi curbele echipotenţiale ale reţelei transformate în planul Z, vom trasa razele vectoare r_i, care corespund fiecărui nod m_i al reţelei de drepte din planul z. Pentru a obţine apoi punctele corespunzătoare din planul Z, în care se transformă punctele m_i, vom ridica la puterea $\frac{3}{2}$, valoarea numerică a segmentului r_i şi vom obţine modulele lor, R_i. Argumentele ω_i le aflăm înmulţind cu $\frac{3}{2}$ argumentul θ_i ale punctelor m_i. Astfel s-au trasat la o scară redusă liniile de cîmp şi curbele echipotenţiale din figura 5.16, b.

Să aplicăm aceeaşi transformare în cazul a două izvoare cilindrice AA' avînd debitele egale şi de sens contrar, a căror linii de curent şi echipotenţiale sînt cercuri, pe care le trasăm, completînd prin simetrie figura 5.13. În planul Z, liniile centrelor celor două surse trec într-un unghi drept, pe care îl vor înconjura celelalte linii de curent. Vom obţine figura 5.17, în care sînt trasate liniile de curent şi cele echi-

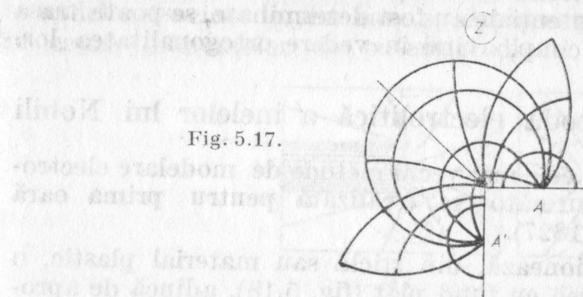


Fig. 5.17.

potenţiale, ce le formează două izvoare de curent cilindrice AA', care se găsesc, fiecare pe laturile unui unghi drept, cînd sînt introduse într-un mediu conductor nelimitat.

În cazul tuturor acestor cîmpuri, determinate în virtutea proprietăţilor funcţiilor de variabilă complexă, putem calcula pe baza celor arătate în 5.5.2, fluxul şi, respectiv, densitatea de curent, în orice punct al mediului conductor, dacă îi cunoaştem rezistivitatea.

Ca aplicaţie practică, se poate calcula, de exemplu, în cazul electrolizei, grosimea stratului de metal ce se depune în diferite puncte pe suprafaţa unui electrod.

5.6. Modelarea experimentală a cîmpurilor potențiale plane

În cuprinsul acestui capitol s-a arătat, prin numeroase exemple, cum se poate obține prin calcul structura cîmpurilor potențiale plane. Această structură este caracterizată prin liniile echipotențiale și de cîmp, deoarece din așezarea lor se poate calcula (v. § 5.2) în orice punct intensitatea cîmpului. În practică se pun însă adesea probleme complicate, a căror rezolvare poate fi foarte dificilă, dacă nu chiar inaccesibilă calculului. În astfel de cazuri, se recurge la metode experimentale. Datorită analogiei ce există între diferitele tipuri de cîmpuri potențiale, una dintre metodele experimentale folosite pentru determinarea configurației lor este modelarea experimentală cu ajutorul cîmpului electrocinetic. În această metodă se înlocuiește studiul unor astfel de cîmpuri prin studiul unor cîmpuri electrice staționare analoage, în lichide slab conductoare. Metoda permite trasarea liniilor echipotențiale între electrozii introduși în lichidul conductor. După ce liniile echipotențiale au fost determinate, se poate trasa orice linie de cîmp, avînd în vedere ortogonalitatea lor.

5.6.1. Metoda electrolitică a inelelor lui Nobili

Una dintre cele mai vechi metode de modelare electrocinetică este următoarea (realizată pentru prima oară de Nobili, în 1827).

Se confecționează, din sticlă sau material plastic, o baie electrolitică cu fund plat (fig. 5.18), adîncă de aproximativ 10 cm, avînd celelalte două dimensiuni destul de

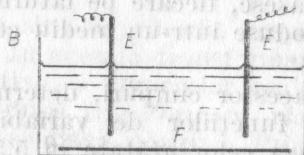


Fig. 5.18.

mari, pentru ca influența pereților să fie neglijabilă. Fundul acestei băi se acoperă, cît se poate de exact, cu o foaie metalică de cupru, argint sau fier. Se toarnă apoi în baie o soluție de acetat de cupru și de plumb, dacă fundul este din cupru sau argint, și de tartrat dublu de antimoniu și potasiu (emetic), dacă fundul este din fier. Se cufundă apoi în baie o serie de electrozi confecționați din oțel șlefuit, fixați prin intermediul unor planșete, astfel ca extremitățile lor inferioare să se găsească în imediata apropiere a plăcii metalice, fără a veni în contact cu ea. Se leagă apoi unii dintre electrozi la polul pozitiv al unei baterii de aproximativ zece volți, iar ceilalți la polul negativ. După închiderea circuitului, datorită peroxidului de plumb ce se depune în straturi transparente, apar foarte frumoase efecte de irizație pe suprafața plăcii care acoperă fundul băii electrolitice. Experiența are o durată de numai cîteva minute. Ulterior descoperirii lor, s-a constatat că liniile colorate care apar corespund cu aceea a liniilor echipotențiale, care ar rezulta din aplicarea directă a electrozilor pe un plan conductor avînd același contur cu placa de cupru care acoperă fundul băii. Avînd în vedere continuitatea cîmpului electrocinetic, explicarea apariției acestor linii echipotențiale care se detașează foarte distinct pe suprafața plăcii este destul de obscură. Este posibilă o explicație, luînd în considerație efectele cuantice ale undelor asociate ionilor care se deplasează în soluție, din cauza diferențelor de potențial dintre electrozi.

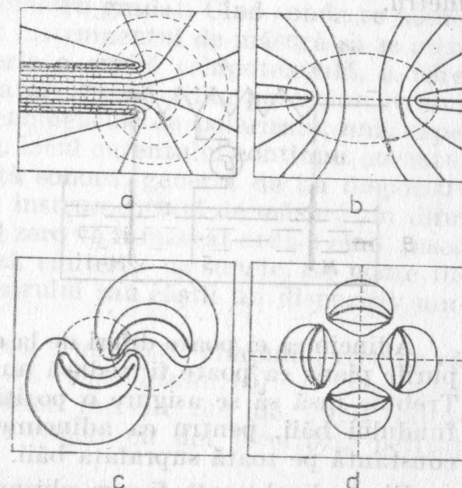


Fig. 5.19.

În figura 5.19, b se arată modul de distribuție a liniilor echipotențiale obținute prin această metodă, între doi electrozi drepți, așezați unul în prelungirea celuilalt,

lăsîndu-se însă între ei o mică distanță. Ele sînt identice cu cele obținute prin calcul și sînt arătate în figura 5.11, b.

În figurile 5.19 a, c și d sînt arătate distribuțiile de potențial pentru alte configurații mai complicate ale electrozilor.

Dacă se lucrează în condiții ingrijite, astfel încît fundul băii să fie perfect orizontal și dacă prin reflexie în electrolit se verifică poziția verticală a electrozilor, aproximația metodei este de ordinul sutimilor de milimetru.

5.6.2. Metoda băii electrolitice

Metoda de determinare a liniilor echipotențiale prin formarea peroxidului de plumb este părăsită astăzi. Se preferă construcția prin puncte a liniilor echipotențiale, formate între doi sau mai mulți electrozi, cu ajutorul unei sonde și a unui instrument de zero cu rezistență interioară mare.

În acest scop, pentru modele ale căror dimensiuni nu întrec 10 pînă la 20 cm și pentru ca influența pereților să fie neglijabilă, se folosește o baie (fig. 5.20) construită din material izolant, avînd lungimea și lățimea egale cu un metru.

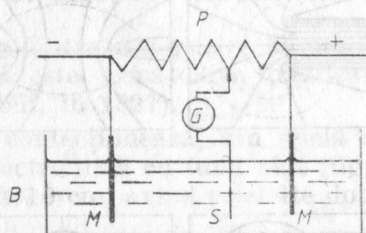


Fig. 5.20.

Adîncimea ei poate diferi de la caz la caz, pentru cîmpurile plane ea poate fi redusă numai la 2 pînă la 3 cm. Trebuie însă să se asigure o poziție perfect orizontală a fundului băii, pentru ca adîncimea electrolitului să fie constantă pe toată suprafața băii.

Electrolitul poate fi apa obișnuită, preferindu-se însă de cele mai multe ori o soluție diluată de sulfat de cupru. Baia trebuie menținută la temperatura constantă și să fie agitată din cînd în cînd, pentru a-i asigura omogenitatea.

Modelul M de electrod care se studiază fiind de dimensiuni reduse, poziția sondei cu care se explorează cîmpul trebuie să fie reperată cu mare precizie prin măsurarea coordonatelor, iar dimensiunile modelelor trebuiesc stabilite cu precizia de 0,1 mm. Pentru reperarea sondei, se așază pe baia electrolitică o construcție foarte rigidă, pe care se dispune un sistem de bare mobile articulate, care permit deplasarea electrodului mobil, măsurîndu-i totodată și coordonatele.

În alte dispozitive, se folosește un pantograf care permite înscrierea traiectoriei în lichid a sondei, direct pe o foaie de hîrtie. Pentru evitarea inevitabilelor tatonări, se poate prevede mecanismul înregistrator cu un electromagnet care poate fi acționat de operator cînd instrumentul de măsură este adus la echilibru.

În cazul cîmpurilor plane, sonda poate fi o vergea metalică subțire, verticală, din platină sau cupru care ocupă toată înălțimea băii.

Curentul folosit poate fi continuu, de preferință cu anod solubil. Dacă experiența nu este bine condusă, se pot produce fenomene de polarizare care pot introduce în circuitul sondei tensiuni electromotoare parazite, care pot modifica suprafața utilă a modelelor folosite.

Instrumentul de măsură este legat între sondă și cursorul unui potențiometru gradat. Cînd sonda se manevrează în așa fel încît instrumentul de măsură să se mențină la zero, ea descrie o curbă echipotențială, a cărei cotă este cunoscută, datorită gradațiilor potențiometrului.

Pentru evitarea fenomenelor de polarizare, unii experimentatori preferă în locul curentului continuu curentul alternativ de frecvență sonoră, generat de un dispozitiv electronic, iar în locul instrumentului de măsură un difuzor sau cască. Punctul zero va fi marcat atunci cînd casca sau difuzorul incetează emiterea de sunete. Se poate introduce înaintea difuzorului sau căștii un dispozitiv amplificator.

Pentru determinarea intensității cîmpului, trebuie să se cunoască rezistivitatea electrolitului, care se determină prin introducerea acestuia într-un tub de sticlă cilindric, calibrat, închis la capete cu doi electrozi, perfect paraleli.

Metoda băii electrolitice poate fi folosită și pentru determinarea suprafețelor echipotențiale, ale cîmpurilor potențiale tridimensionale. În acest caz baia trebuie să

fie mai adîncă, iar sonda să fie făcută dintr-un fir de cupru sau platină, complet izolat, în afară de extremitatea sa inferioară.

Pentru modelarea experimentală a cîmpurilor fizice se mai folosesc și alte metode, dintre care cităm procedeele electrostatice cu pulberi sau cu tuburi luminescente, procedeele termice, procedeele magnetice cu pilitură de fier, procedeele hidrodinamice etc., asupra cărora nu vom insista.

Capitolul 6. MODELAREA ÎN FIZICA ATOMICĂ ȘI NUCLEARĂ

„Fiecare frază pe care o rostesc trebuie înțeleasă nu ca o afirmație, ci ca o întrebare."

Niels BOHR

După cum reiese din cele spuse în capitolele precedente, aproape întreaga dezvoltare a fizicii a avut loc ca urmare a căutării unei reprezentări a realității, situate dincolo de aparențele senzoriale.

Încă cu 2000 de ani în urmă, s-a emis ipoteza că toate substanțele sînt formate dintr-un număr foarte mare de atomi. Democrit a făcut prima încercare de modelare în structura materiei, reprezentînd atomii sub diferite forme în funcție de proprietățile avute de substanțele din care fac parte.

Nevoia de a modela realitatea este determinată de imposibilitatea ca aceasta să fie studiată, în forma pe care o percepem, tocmai datorită complexității sale. Aceasta a făcut ca pentru explicarea diferitelor fapte experimentale observate, să se imagineze de către oamenii de știință modele ale fenomenelor, imagini ale lumii reale în care trăim.

6.1. Modele atomice

6.1.1. Modelul static al atomului (J.J. Thomson)

Ca și Democrit, marele chimist Dalton — fondatorul teoriei atomice — considera că limita de divizibilitate a substanței este atomul. În 1833, Faraday descoperă fenomenul de electroliză, de unde găsește că pentru a depune la catod un echivalent gram din orice substanță este nevoie de aceeași sarcină electrică $F = 96\,490$ coulombi, constantă, numită numărul lui Faraday. Rezultă că pentru a depune la catod un atom gram de substanță monovalentă sînt

necesari F coulombi, pentru una bivalentă sînt necesari $2F$ coulombi etc.

Cum într-un atom gram din orice substanţă sînt $N = 6{,}025 \times 10^{23}$ atomi, rezultă că în medie fiecare ion monovalent va transporta sarcina

$$e = \frac{F}{N} = \frac{96\,490}{6{,}025 \times 10^{23}} = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \quad \text{coulombi.}$$

Un ion bivalent va transporta o sarcină de două ori mai mare etc. Acestei sarcini elementare, în 1874, Stoney îi dă numele de electron.

O dată cu descoperirea radioactivităţii naturale în 1895 şi a dovedirii că aceasta este un fenomen subatomic, s-a pus problema structurii atomului. Dat fiind faptul că substanţa este în general neutră din punct de vedere electric şi întrucît electronii negativi s-au dovedit a fi constituienţi ai atomilor, rezultă clar că atomul trebuie să conţină şi purtători de sarcină electrică pozitivă. Aşadar, era vorba de o structură electrică a atomului.

Primul model de atom a fost propus de W. Thomson (Lord Kelvin) în 1902. Conform acestui model, sarcina pozitivă a atomului este uniform distribuită în interiorul atomului, iar electronii se dispun sub forma unor straturi concentrice. Practic, atomul era reprezentat ca o „picătură" sferică, compusă dintr-o substanţă încărcată pozitiv, înăuntrul căreia erau „scufundaţi" electronii, al căror număr era atît de mare, încît anulau sarcina pozitivă a atomului. Este aşa-numitul atom tip „cozonac cu stafide".

Începînd cu 1903, J. J. Thomson dezvoltă acest model, considerînd că sarcina pozitivă este, de asemenea, uniform distribuită în interiorul volumului ce delimitează dimensiunea atomului, însă datorită forţelor cvasielastice, electronii oscilează în jurul unei poziţii de echilibru. Acest model de atom are totuşi un caracter static. Stabilitatea atomului este asigurată de egalitatea forţei electrostatice de interacţiune dintre electroni şi elementele de volume încărcate pozitiv, cu forţa cvasielastică,

$$F = \frac{-e\,e'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} = -K\,r,$$

unde r este distanţa dintre punctul A, în care se află electronul şi centrul sferei, iar $-e$ şi e' sînt sarcina electronului şi, respectiv, sarcina pozitivă a atomului (fig. 6.1).

Datorită acestor oscilaţii, atomul ar emite în spaţiul înconjurător radiaţii electromagnetice. În acest mod s-ar explica emisia şi absorbţia luminii de către atom, deci a liniilor spectrale.

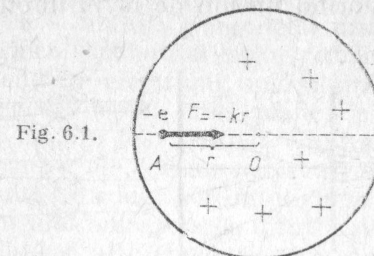


Fig. 6.1.

Deşi modelul de atom propus de J. J. Thomson a jucat un rol pozitiv în istoria ştiinţelor, modelul are un caracter artificial, întrucît atribuie sarcinilor pozitive şi negative naturi diferite. Şi anume, sarcinile pozitive sînt considerate ca avînd o distribuţie continuă, în timp ce sarcinile negative ar avea o distribuţie granulară. În acelaşi timp, deşi cu ajutorul acestui model s-a dat o explicaţie originii liniilor spectrale, valorile experimentale ale frecvenţelor acestor linii nu coincideau cu cele calculate. Toate aceste fapte au cerut înlocuirea modelului cu altul mai perfecţionat.

6.1.2. Modelul atomic planetar (Rutherford)

Problema verificării ipotezelor lui J. J. Thomson cu privire la structura atomului a preocupat pe mulţi oameni de ştiinţă, la începutul secolului al XX-lea. Trimiţînd fascicule de electroni prin foiţe subţiri, confecţionate din diferite substanţe, Lenard (1903) găseşte că electronii pot străbate un număr mare de atomi, fără să fie deviaţi de la traiectoria iniţială. El ajunge astfel la concluzia că sarcina pozitivă a atomului nu este uniform distribuită în întreg atomul, ci are şi ea o structură granulară. Lenard a constatat că electronii străbat foiţa metalică fără să sufere o deviaţie apreciabilă. Aceasta a condus la ideea că sarcina electrică pozitivă a atomului nu este dispersată continuu, ca în modelul lui Thomson, ci este concentrată în centrul atomului.

În 1911 Rutherford sondează interiorul atomilor cu ajutorul particulelor alfa, emise de substanțele radioactive, plecînd de la o serie de rezultate obținute de doi dintre colaboratorii săi, Geiger și Marsden, privitoare la difuzia radiației alfa, la trecerea ei prin substanță. Se știe că radiația alfa este formată din particule alfa, fiecare dintre acestea reprezentînd un ion de heliu dublu ionizat.

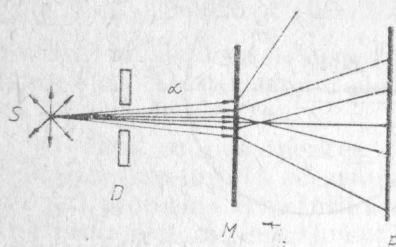


Fig. 6.2.

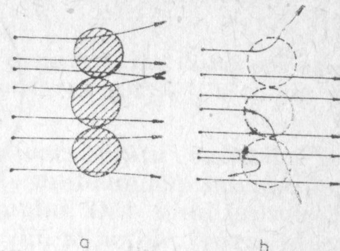


Fig. 6.3.

Schema experienței lui Rutherford este dată în figura 6.2. Particulele α emise de sursa S de radiu sînt diafragmate de diafragma D, iar o parte cad pe difuzorul M, care poate fi, de exemplu, o foiță de aluminiu, cupru, argint sau aur. Particulele alfa, împrăștiate de M sub diferite unghiuri față de direcția inițială, vor ajunge pe placa fotografică P, care le va înregistra. În toate experiențele, aproape toate particulele au trecut prin foița metalică și numai unele au fost deviate. Aceasta arată că atomul are o structură spațială, adică există în atom spații libere prin care au putut trece particulele α. Pe de altă parte, o mică parte din particulele α inițiale au fost difuzate sub unghiuri mai mari de 90°, adică au fost reflectate înapoi spre sursă. Aceasta sugerează faptul că în interiorul atomului există o mică parte, încărcată cu o sarcină pozitivă, astfel că sarcina electrică totală a atomului luat ca un întreg este egală cu zero. Această parte a fost numită nucleu. În figura 6.3 este reprezentat modul în care apare difuzia particulelor α prin nuclee în cadrul modelului Thomson (a) și în cadrul modelului lui Rutherford (b).

Noile experiențe ale lui Rutherford au arătat că nucleul se află în centrul atomului, în care este concentrată întreaga sarcină pozitivă a atomului și aproape întreaga sa masă. Astfel, dacă diametrul atomului este de circa 10^{-10} m, diametrul nucleului este de ordinul 10^{-15} m. În același timp, electronii atomului sînt distribuiți în

jurul nucleului pozitiv într-un volum relativ mare, în comparație cu volumul nucleului.

Evident, acești electroni nu pot fi imobili, întrucît datorită atracției electrostatice ar cădea pe nucleu. Astfel Rutherford a presupus că electronii efectuează o mișcare de rotație în jurul atomului. În acest fel, modelul de atom a lui Rutherford — numit și modelul nuclear al atomului — are imaginea sistemului solar, nucleul pozitiv jucînd rolul soarelui iar electronii, mai mulți sau mai puțini, se rotesc în jurul nucleului, ca și planetele în jurul soarelui. Această ipoteză a fost perfect confirmată de o serie de fapte experimentale, permițînd evaluarea sarcinii pozitive a nucleului și a legii de împrăștiere a particulelor.

Să explicăm mai îndeaproape difuzia particulelor alfa, reliefînd totodată și alte concluzii care s-au desprins din aceste experiențe.

Fie deci o particulă α care se apropie de nucleul D din direcția B (fig. 6.4). Particula α are sarcina Ze, masa m și viteza v_0. Între nucleul încărcat cu sarcina Ze și

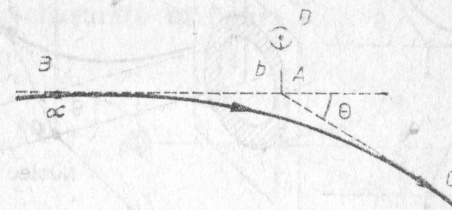


Fig. 6.4.

particula α încărcată cu sarcina $Z'e$ se manifestă forța de respingere electrostatică

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Ze(Z'e)}{r^2} = \frac{ZZ'e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad (6.1)$$

unde r este distanța la un moment dat dintre particula α și nucleu (s-a presupus că interacțiunea are loc în aer, deci $\varepsilon_r = 1$).

Distanța $b = DA$ la care particula α ar trece față de nucleu dacă n-ar acționa forța de respingere, se numește parametru de ciocnire.

Din mecanică știm că traiectoria particulei care se mișcă sub acțiunea unei forțe centrale, invers proporțională cu pătratul distanței, este o curbă de ordinul doi,

cu focarul în centrul de acțiune al forței. În cazul forței de respingere, această curbă este o hiperbolă, astfel încît între unghiul de difuzie și parametrul de ciocnire b există relația

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = b\,\frac{mv^2}{2Ze^2}\,. \qquad (6.2)$$

Dependența traiectoriei particulei α de mărimea parametrului de ciocnire este ilustrată în figura 6.5. Din (6.2) rezultă că unghiul de difuzie al particulelor α va fi cu atît mai mare, cu cît ea va trece mai aproape de nucleu și cu cît va fi mai mică energia sa cinetică.

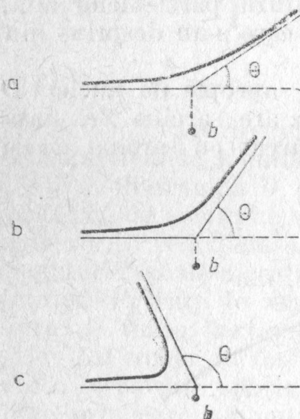


Fig. 6.5.

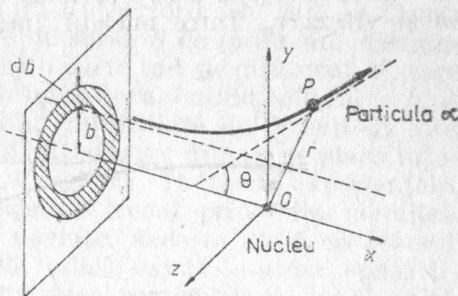


Fig. 6.6.

Relația de mai sus nu se poate verifica prin experiențe directe, întrucît parametrul de ciocnire nu este o mărime direct măsurabilă. Un rezultat verificabil experimental se obține dacă, în locul unei singure particule, se folosește un fascicul de particule α. Fie deci un asemenea fascicul, dirijat perpendicular pe o foiță metalică de grosime d, conținînd n atomi în unitatea de volum, astfel încît o particulă α este difuzată o singură dată.

Deoarece parametrii de ciocnire ai particulelor α din fascicul sînt diferiți, rezultă că și unghiurile de difuzie vor fi diferite. Să determinăm numărul de particule α difuzate sub unghiuri cuprinse între θ și $\theta + d\theta$. Notăm cu N_0 numărul de particule care cad perpendicular pe suprafața de un cm² a foiței metalice.

Presupunînd că difuzia particulelor α este determinată de un singur atom din foița metalică, vor fi difuzate, după unghiul cuprins între θ și $\theta + d\theta$, toate particulele care trec prin suprafața inelului hașurat, trasat în jurul atomului O ca centru, avînd raza b și grosimea db (fig. 6.6). Numărul de particule difuzate sub unghiuri cuprinse între θ și $\theta + d\theta$ este egal cu produsul dintre N_0 și suprafața inelului,

$$dN_\theta = N_0\, 2\pi b \cdot db. \qquad (6.3)$$

Introducînd în această relație produsul $b\,db$ din (6.2), rezultă

$$dN_\theta = N_0 2\pi\left(\frac{2Ze^2}{mv^2}\right)^2 \cdot \frac{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{d\theta}{2}. \qquad (6.4)$$

Acest număr de particule se dispun pe suprafața unei zone sferice, hașurată în figura 6.7,

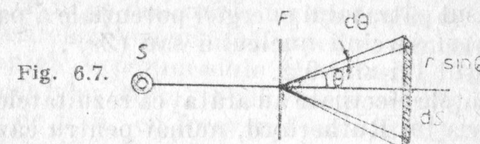


Fig. 6.7.

$$dS = r d\theta\, 2\pi r \sin\theta = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta.$$

Numărul de particule α difuzate într-un unghi solid egal cu unitatea ($r = 1$) va fi

$$N_\theta = \frac{dN_\theta}{dS}$$

și deci, prin integrarea relației (6.4), se obține

$$\frac{N_\theta}{N_0} = \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}},$$

unde raportul N_θ/N_0 reprezintă probabilitatea ca o particulă α să fie difuzată sub unghiul θ.

Considerînd că foiţa metalică prin care trec particulele α are grosimea d şi conţine n atomi în unitatea de volum, se obţine relaţia

$$N_\theta = N_0 nd \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (6.5)$$

numită formula de împrăştiere a lui Rutherford.

Cu ajutorul acestei relaţii, considerînd că ipoteza atomului nuclear este adevărată, Rutherford ajunge la următoarele concluzii:

1) toată sarcina pozitivă a atomului şi aproape întreaga sa masă este concentrată în nucleul atomului, ale cărui dimensiuni sînt de ordinul a 10^{-15}m;

2) legea lui Coulomb, descoperită pentru cazul interacţiunilor electrice macroscopice, este valabilă şi în cazul interacţiunilor microscopice, la nivelul atomului;

3) numărul de particule α difuzate de o foiţă metalică este proporţional cu:

— numărul iniţial N_0 de particule α,
— grosimea d a materialului difuzant,
— inversul pătratului energiei potenţiale a particulei α,
— pătratul sarcinii nucleului sau $(Ze)^2$,
— inversul lui $\sin^4 \theta/2$.

Experienţele efectuate au arătat că rezultatele concordă bine cu teoria lui Rutherford, numai pentru cazurile cînd foiţa difuzantă era confecţionată din metale mai grele, iar viteza particulelor α nu era prea mare.

Într-adevăr, dacă foiţa difuzantă era formată din atomi mai uşori, iar energia particulelor α era suficient de mare, s-a constatat că unghiurile de difuzie devin mari, iar formula de împrăştiere nu se mai verifică. Aceste observaţii au fost explicate considerînd că în aceste cazuri particulele α avînd posibilitatea să treacă mult mai aproape de nucleu decît în primul caz, în afară de forţa de respingere electrostatică, apar forţe noi, de altă natură decît cele electrostatice, care au fost numite mai tîrziu, forţe nucleare.

Un succes deosebit al acestui model a constat în faptul că a făcut posibil calcularea mărimii sarcinii Ze a nucleelor unor elemente. În acest fel, Chadwick, un colaborator a lui Rutherford, folosind relaţia (6.5) găseşte pentru cupru $Z = 29{,}3$, pentru argint $Z = 46{,}6$, iar pentru platină $Z = 77{,}4$, apropiate de valorile 29; 47 şi 78 ale numerelor de ordine ale elementelor respective din tabelul periodic al elementelor.

6.1.3. Modelul atomic cuantic al lui Bohr

Deşi cu ajutorul modelului de atom al lui Rutherford s-a făcut un salt calitativ în explicarea unor fapte experimentale, totuşi modelul ca atare nu putea fi pus în acord cu teoriile electrodinamicii clasice. În modelul planetar al atomului, stabilitatea acestuia este asigurată de faptul că forţa electrostatică de respingere dintre nucleu şi electroni este echilibrată de forţa centrifugă de rotaţie a electronilor.

Electrodinamica clasică însă afirmă că orice particulă încărcată electric aflată în mişcare de rotaţie, fiind continuu accelerată, emite continuu energie sub formă de radiaţii. Dar aceasta înseamnă că atomul emite continuu radiaţii, avînd drept rezultat scăderea energiei electronului şi deci în final „căderea" electronului pe nucleu, într-un timp de ordinul 10^{-9} s. Aceasta ar însemna ca mişcarea electronului să se facă pe o traiectorie sub formă de spirală, cu raza din ce în ce mai mică, iar spectrele de emisie ale atomilor diferitelor elemente să fie spectre continue.

Toate faptele experimentale arată însă că, în general, atomii elementelor sînt stabili, iar spectrele de emisie sînt spectre de linii, cu frecvenţe bine stabilite. Aceasta înseamnă că emisia de radiaţii de către atomi nu are loc la întîmplare şi deci la scara microcosmosului trebuie folosite legi noi, care să reflecte realitatea.

Pentru înlăturarea acestor dificultăţi, Niels Bohr (1913) a procedat la tratarea modelului de atom a lui Rutherford prin prisma concepţiilor noi, ale teoriei cuantice a lui Planck, care presupune că radiaţiile sînt emise sau absorbite de sistemele atomice în cantităţi discrete, multipli ale cuantei de acţiune: $\varepsilon = h\nu$, h fiind constanta lui Planck, iar ν — frecvenţa de emisie.

Pentru explicarea noilor fapte experimentale, Bohr, a formulat două postulate:

1. *Postulatul mecanic sau postulatul despre stările staţionare* afirmă că atomii pot exista un timp mai îndelungat numai aflîndu-se în anumite stări, numite stări staţionare. În aceste stări, energia rămîne constantă, deoarece nici nu se emite, nici nu se absoarbe radiaţie. Fiecare dintre

aceste stări este caracterizată de o anumită valoare a energiei, astfel încît energiile diferitelor stări ale aceluiaşi atom formează un şir discret $W_1, W_2, W_3, \ldots, W_n$.

2. *Postulatul optic* sau *condiţia de frecvenţă* afirmă că la trecerea dintr-o stare staţionară în altă stare staţionară atomii emit sau absorb radiaţii numai pentru frecvenţe strict determinate. Radiaţia emisă sau absorbită la trecerea atomilor din starea staţionară cu energia W_2 în starea staţionară cu energia $W_1 (W_2 > W_1)$ are loc pentru frecvenţa ν, dată de relaţia

$$h\nu = W_2 - W_1. \qquad (6.6)$$

Verificarea experimentală a primului postulat a lui Bohr a fost realizată încă în 1913 de Frank şi Hertz. Se ştie că atomii care au un surplus de energie se află într-o stare excitată. Ei nu rămîn în starea excitată, ci au tendinţa de a reveni în starea normală, neexcitată, emiţînd un foton a cărui energie este egală cu variaţia energiei electronului (fig. 6.8). Radiaţia formată din fotonii astfel emişi se numeşte radiaţie de rezonanţă.

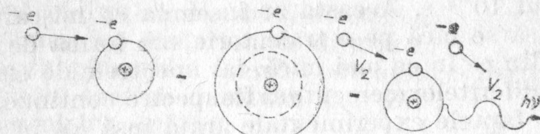


Fig. 6.8.

Una dintre metodele de aducere a atomilor în stare excitată se realizează prin bombardarea acestora de către electronii acceleraţi, datorită unei diferenţe de potenţial U. În cazul în care prin ciocnirea cu atomii, electronii acceleraţi pierd energie, pe care o absoarbe atomul ciocnit, are loc o ciocnire neelastică. Dacă energia electronilor acceleraţi este suficient de mare, poate avea loc ionizarea atomilor ciocniţi, prin îndepărtarea unuia din electronii exteriori, atomii respectivi devenind ioni pozitivi. Valoarea tensiunii acceleratoare U din acest caz se numeşte potenţial de ionizare.

Postulatul stărilor staţionare este verificat prin experienţa lui Frank şi Hertz, redată în figura 6.9, folosindu-se aşa-numita metodă a potenţialului întîrzietor. Dispozitivul este format dintr-un tub de descărcare, prevăzut cu catodul C, grila S şi anodul A, în interior aflîndu-se vapori de mercur, la presiunea de

circa un torr. Electronii eliberaţi de catodul C sînt acceleraţi între C şi grila S care are potenţialul U, pozitiv faţă de C. Energia fiecărui electron creşte cu

$$\frac{mv^2}{2} = eU,$$

unde eU este mărimea lucrului cîmpului electric.

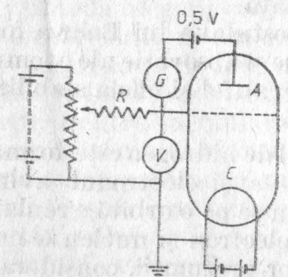


Fig. 6.9.

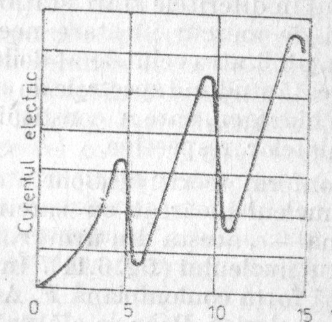


Fig. 6.10.

Reglînd diferenţa de potenţial U, se poate obţine un fascicul de electroni de o anumită energie. Dacă în urma ciocnirii cu atomii de mercur, electronii nu-şi variază energia, ei vor ajunge la anod şi vor fi înregistraţi de galvanometrul G. Atunci cînd tensiunea acceleratoare devine 4,9 V, se constată o scădere bruscă a curentului electric înregistrat de G, chiar dacă U creşte în continuare. Acelaşi fenomen se întîmplă pentru U egal cu 9,8 V; 14,7 V etc. (fig. 6.10).

Ce s-a întîmplat în aceste situaţii? Scăderea bruscă a curentului electric, înseamnă că electronii n-au mai ajuns la anod spre a fi înregistraţi de G. În drumul lor, electronii s-au ciocnit neelastic cu atomii de mercur, le-au cedat acestora energie, iar energia rămasă fiecărui electron a devenit insuficientă pentru trecerea prin spaţiul SA, grila S fiind la un potenţial cu aproximativ $+0{,}5$ V mai mare decît a anodului A. Aceasta înseamnă că electronii avînd energia mai mică decît 0,5 eV, vor fi captaţi de grila S.

Faptul că prima scădere a curentului electric are loc cînd electronii ajung la energia de 4,9 eV, arată că în acest moment, între electronii şi atomii de mercur au avut loc ciocniri neelastice, în apropiere de S. A doua scădere, corespunzătoare energiei de 9,8 eV, înseamnă că fiecare elec-

tron a ciocnit neelastic de două ori atomii de mercur etc. Se observă că în toate cazurile atomii de mercur își pot varia energia numai cu multipli întregi ai valorii de 4,9 eV. Dar aceasta înseamnă că energia atomului de mercur poate lua valorile

$$W_1;\ W_1 + 4{,}9\ \text{eV};\ W_1 + 2\cdot 4{,}9\ \text{eV};\ W_1 + 3\cdot 4{,}9\ \text{eV};\ldots$$

care formează un șir discret de valori pe care le poate avea atomul în diferitele stări staționare, W_1 fiind energia atomului de mercur în stare neexcitată.

Valabilitatea celui de al doilea postulat a lui Bohr a fost verificată studiind spectrele de emisie și absorbție ale atomului de hidrogen, care a constituit de altfel și cheia stabilirii postulatelor respective.

Conform teoriei lui Bohr, atomul de hidrogen este format din nucleul încărcat cu sarcina $+e$ și electronul avînd sarcina $-e$, acesta din urmă rotindu-se pe o orbită circulară în jurul nucleului (fig. 6.11). Între electron și nucleu se manifestă forța coulombiană F. Acestor prezumții, considerate ca fiind clasice, Bohr le alătură cele două postulate, ceea ce de fapt înseamnă că a aplicat teoria cuantică modelului de atom a lui Rutherford.

Problema care se punea, era de a afla care sînt orbitele permise ale electronului care corespund stărilor staționare.

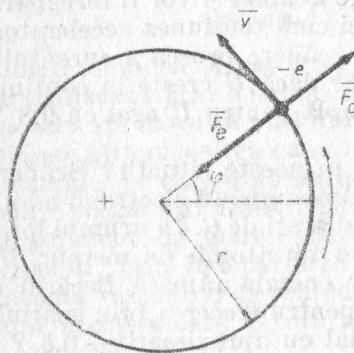


Fig. 6.11.

Cu alte cuvinte, trebuia găsite care sînt valorile energiilor atomului, aflat în stare staționară. Problema a fost rezolvată prin formularea condiției de selecție a stărilor staționare.

Conform mecanicii clasice, se poate admite o infinitate de orbite pentru electronul aflat în rotație în jurul nucleului. Într-adevăr, folosind faptul că stabilitatea sistemului nucleu-electron este dată de echilibrul dintre forța electrostatică de atracție și forța centrifugă de inerție,

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}, \tag{6.7}$$

se obține o ecuație cu necunoscutele r și v, care admite deci o infinitate de soluții.

Metoda alegerii orbitelor permise pentru electronul din atom este dată de așa-numita condiție cuantică a lui Bohr care reprezintă de fapt însăși generalizarea ideii de cuantificare a lui Planck, extinsă la mișcarea electronului din atom. Pentru formularea acestei condiții, considerăm că starea sistemului nucleu-electron poate fi descrisă cu ajutorul unor parametri numiți coordonate generalizate. În cazul mișcării pe un cerc, coordonata generalizată este unghiul polar φ (fig. 6.11). Acestei coordonate îi corespunde un impuls generalizat,

$$p_\varphi = \frac{\partial W_c}{\partial \dot{\varphi}},$$

unde W_c este energia cinetică a electronului, iar $\dot{\varphi} = \partial\varphi/\partial t$.

Pentru determinarea lui p_φ, exprimăm pe W_c în coordonate polare,

$$W_c = \frac{mv^2}{2}, \text{ unde } v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(r\varphi)}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = r\dot{\varphi},$$

r fiind raza traiectoriei, iar ds porțiunea de curbă parcursă de electron în timpul dt.

Rezultă

$$p_\varphi = \frac{\partial W_c}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = mvr,$$

unde mvr este impulsul generalizat, egal cu momentul cinetic orbital al electronului ce se mișcă pe o orbită circulară de rază r.

Cum însă

$$p_\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial W_c}{\partial \dot{\varphi}}\cdot \mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}W_c}{\mathrm{d}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}\cdot \mathrm{d}\varphi,$$

înseamnă că produsul $p_\varphi\, d\varphi$ are dimensiunea energie · timp, deci o acțiune.

Conform teoriei cuantice a lui Planck, orice acțiune este un multiplu al cuantei de acțiune h și deci

$$\oint p_\varphi\, d\varphi = nh,$$

unde n este un număr întreg, iar $\oint$ reprezintă integrala pe conturul închis, care este chiar orbita circulară. Întrucît la mișcarea pe un cerc, $p_\varphi = mvr$ = const, mărimile m, v și r fiind mărimi constante, rezultă că

$$p_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = mvr\ 2\pi = nh.$$

Bohr consideră că sînt permise numai acele orbite pentru care momentul cinetic orbital al electronului este

$$p_\varphi = mvr = n\frac{h}{2\pi}, \tag{6.8}$$

unde n este numărul cuantic și care i-a valorile $n = 1, 2, 3, \ldots$ pentru orbite succesive.

Eliminînd pe v, din relațiile (6.7) și (6.8), se obține

$$r = n^2 \cdot \frac{(4\pi\varepsilon_0)h^2}{4\pi^2 m e^2}.$$

Înlocuind valorile diferitelor constante, se obține pentru raza primei orbite a lui Bohr ($n = 1$), valoarea $r_1 = 0{,}529$ Å, astfel că diametrul atomului ar fi de 1 Å $= 10^{-10}$ m, în bună concordanță cu valoarea estimată din teoria cinetico-moleculară. Raza r_n a unei orbite permise oarecare, avînd numărul cuantic n, este

$$r_n = n^2 r_1,$$

ceea ce arată că razele orbitelor succesive cresc proporțional cu pătratele numerelor întregi.

Întrucît nici valoarea razei permise și nici a vitezei electronului nu pot fi determinate direct experimental, verificarea teoriei lui Bohr s-a făcut, așa după cum s-a arătat mai sus, studiind spectrele de emisie și absorbție ale atomului de hidrogen. În acest scop se determină cu

foarte mare precizie mai întîi variația energiei emise sau absorbite de atomii de hidrogen, din măsurătorile spectrale.

Studiind succesiunea liniilor spectrale din spectrul vizibil al hidrogenului, Balmer găsește în 1885 o relație empirică de forma

$$\bar{\nu} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right);\ n = 3, 4, 5, \ldots \tag{6.9}$$

În această relație $\bar{\nu} = 1/\lambda$ este numărul de undă (care arată cîte lungimi de undă sînt pe un centimetru de lungime), $R_H = 10{,}968 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^{-1}$ este constanta lui *Rydberg*, obținută din măsurători spectroscopice, iar n este un număr întreg care caracterizează linia spectrală.

Folosind teoria sa, Bohr calculează energia stării staționare a atomului de hidrogen, considerînd că ea are două componente : energia cinetică a electronului care se rotește în jurul nucleului,

$$W_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\ n^2 h^2}$$

și energia potențială de interacțiune dintre electron și nucleu,

$$W_p = -\frac{e^2}{(4\pi\varepsilon)^2}\cdot\frac{1}{r} = -\frac{4\pi^2 m e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2 h^2},$$

unde am folosit expresiile lui v și r, date de (6.7) și (6.8).

Comparînd W_c cu W_p se găsește că $W_p = -2W_c$ și deci energia stării staționare a celei de n-a orbite este

$$W_n = W_c + W_p = -W_c = -\frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \cdot n^2 h^2}\cdot \tag{6.10}$$

Energia stării staționare apare negativă, deoarece se consideră că două sarcini aflate la infinit una de alta au energia potențială egală cu zero. Pe măsură ce electronul se apropie de nucleu, sistemul nucleu-electron își variază energia emițînd radiații. Energia potențială devine mai mică decît zero, în timp ce energia cinetică crește. Creșterea energiei cinetice este însă mai lentă decît scăderea energiei potențiale, motiv pentru care energia stării staționare este negativă. Valoarea negativă a energiei stării staționare arată că la formarea atomului respectiv, ener-

gia sa internă scade, formarea fiind însoţită de degajare de energie.

Starea staţionară pentru care $n = 1$ se numeşte stare fundamentală şi este starea cea mai stabilă a sistemului. Acestei stări îi corespunde energia

$$W_1 = -\frac{2\pi^2 me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^2},$$

în timp ce celelalte stări au energiile $W_n = n^2 W_1$.

Conform postulatului al doilea a lui Bohr, frecvenţa luminii emise de atom, la saltul electronului de pe orbita n_2 pe orbita n_1, este dată de relaţia

$$h\nu = W_2 - W_1 = \frac{2\pi^2 me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^2}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

iar numărul de undă ($\bar{\nu} = 1/\lambda = \nu/c$) este

$$\bar{\nu} = \frac{2\pi^2 me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 ch^3}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

sau

$$\bar{\nu} = R_H\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \tag{6.11}$$

unde R_H este constanta lui Rydberg. În toate cazurile $n_2 > n_1$.

Se observă de fapt că a fost regăsită pe cale teoretică formula empirică (6.9) a lui Balmer. În plus, calculîndu-se R_H din relaţia

$$R_H = \frac{2\pi^2 me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 ch^3} = 10,974 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1},$$

s-a găsit o valoare foarte apropiată de aceea, rezultată din măsurători spectroscopice. Aceste două fapte, regăsirea pe cale teoretică a formulei empirice a lui Balmer şi calcularea constantei lui Rydberg, a reprezentat un mare succes al teoriei lui Bohr.

Teoria lui Bohr a dat un sens fizic clar liniilor spectrale, explicînd mecanismul emisiei şi absorbţiei luminii de către atomi. Liniile spectrale reprezintă radiaţii monocromatice care apar ca rezultat al trecerii atomului dintr-o stare excitată oarecare într-o altă stare mai puţin excitată. Aşa de exemplu, în partea vizibilă a spectrului

hidrogenului, există un număr de linii ce formează seria Balmer, dintre care patru sînt mai intense: linia roşie (H_α), linia verde-albastru (H_β), şi două linii violete (H_γ, H_δ).

Plecînd de la această interpretare, formula (6.11) sugerează faptul că în afara de seria Balmer, pentru care $n_1 = 2$, există şi alte serii spectrale, caracterizate fiecare prin intervalul de frecvenţă în care se află, corespunzînd lui $n_1 = 1$, $n_1 = 3$, $n_1 = 4$, $n_1 = 5$ etc.

Aceste serii au fost descoperite de Lyman în domeniul ultraviolet al spectrului hidrogenului şi Paschen, Bracket şi Pfund în infraroşu, relaţia (6.11) fiind valabilă şi pentru aceste serii, motiv pentru care se numeşte formula generalizată a lui Balmer.

În această formulă numărul n_1 caracterizează seria spectrală, iar n_2 caracterizează linia spectrală. De asemenea, se obişnuieşte ca termenul $1/n_1^2$ să se numească termen fundamental, acesta păstrînd o valoare constantă în cadrul unei serii spectrale, iar termenul $1/n_2^2$ — termen curent, variind de la o linie la alta, în cadrul aceleiaşi serii.

În figura 6.12 este reprezentat aşa-numitul model spaţial al atomului de hidrogen şi mecanismul de emisie

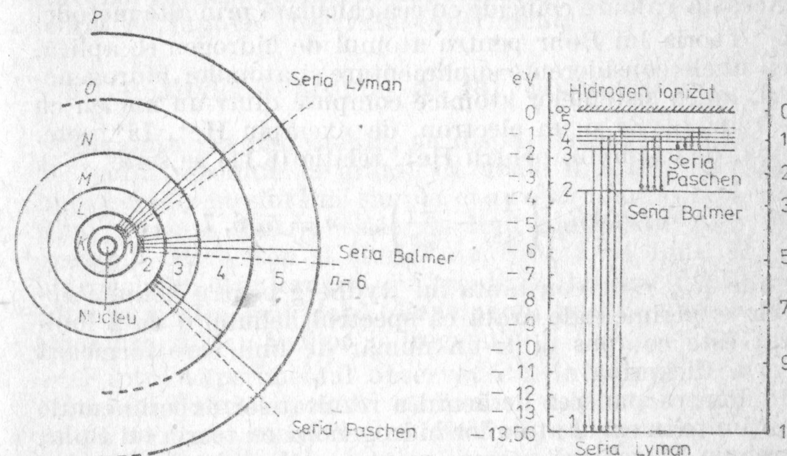


Fig. 6.12.

Fig. 6.13.

al liniilor diferitelor serii spectrale. În mod curent stările staţionare se notează cu literele K, L, M, N, O, P, în ordinea depărtării de nucleu. Toate tranziţiile care se

fac de pe stările superioare pe starea K formează seria Lyman, tranzițiile pe starea L formează seria Balmer etc.

În figura 6.13 tranzițiile electronice ale atomului de hidrogen sînt reprezentate cu ajutorul nivelelor energetice. Prin nivel energetic înțelegem valoarea energiei pe care o posedă un atom aflat într-o anumită stare staționară, fiecărei stări staționare, corespunzîndu-i o valoare unică și bine determinată a energiei. În figură sînt date valorile nivelelor energetice, numerele cuantice și numerele de undă corespunzătoare.

În acord cu cele spuse mai înainte, valorile tuturor nivelelor energetice sînt negative. Pentru a scoate electronul aflat pe primul nivel energetic din atomul de hidrogen, trebuie cheltuită energia

$$W_\infty - W_1 = h\nu = \frac{2\pi^2 me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^2}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{\infty}\right)$$

sau

$$h\nu = \frac{2\pi^2 me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^2} = 13{,}56 \text{ eV}$$

și reprezintă energia de ionizare a atomului de hidrogen. Această valoare coincide cu cea calculată prin alte metode.

Teoria lui Bohr pentru atomul de hidrogen se aplică, cu unele considerente suplimentare și atomilor hidrogenoizi, adică sistemelor atomice compuse dintr-un nucleu cu sarcina $+Ze$ și un electron, de exemplu He^+, Li^{++} etc. Așa, de exemplu, pentru He^+, relația (6.11) se scrie

$$\bar{\nu}_{He} = 4R_{He}\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right); \quad n = 5, 6, 7, \ldots,$$

unde R_{He} este constanta lui Rydberg pentru heliu. Faptele experimentale arată că spectrul heliului o dată ionizat este compus dintr-un număr de linii care formează seria Pickering.

Pentru punerea de acord a rezultatelor experimentale obținute în cazul atomilor hidrogenoizi cu teoria lui Bohr, trebuie să se țină seama, printre altele, de dependența relativistă a masei electronului de viteză, de mișcarea nucleului și chiar de mișcarea sistemului nucleu-electron, în jurul centrului de greutate comun. Ținînd seama, de exemplu, de mișcarea nucleului din atom și de dependența

constantei lui Rydberg de masa nucleului, a fost posibilă descoperirea izotopului hidrogenului, numit deuteriu.

În sfîrșit, fără a micșora pasul important făcut, trebuie să arătăm că teoria lui Bohr are o serie de limite și de contradicții de nerezolvat în cadrul acestei teorii. Așa, de exemplu, Bohr a folosit modelul planetar al atomului fără să explice de ce electronul nu emite radiații în mișcarea sa pe orbită, conform teoriei electromagnetice clasice, a lui Lorentz. De asemenea, nu există nici un fel de bază teoretică care să permită suprapunerea condiției cuantice peste modelul clasic al atomului.

Toate aceste fapte conduc la ideea că teoria lui Bohr nu este nici consecvent clasică și nici consecvent cuantică, fiind pătrunsă de o contradicție internă chiar în ce privește bazele ei. Această concluzie l-a determinat pe fizicianul W. G. Bragg să afirme în glumă că „în teoria lui Bohr, lunea, miercurea și vinerea se folosesc legile mecanicii clasice, iar marțea, joia și sîmbăta se folosesc legile cuantice".

Toate aceste imperfecțiuni și limite ale teoriei lui Bohr au constituit punctul de plecare spre noi cercetări, spre noi modele ale atomului, care să apropie mai mult teoria de faptele observate experimental.

6.1.4. Modelul atomic al lui Sommerfeld

Examinarea mai atentă, cu dispozitive spectroscopice de înaltă rezoluție, a arătat că unele linii din spectrul hidrogenului nu sînt linii simple, ci au o strucură complexă, fiind formate dintr-o serie de linii apropiate. Așa, de exemplu, Michelson și Morley au arătat că linia H_α a hidrogenului este formată din trei linii, din care două mai intense și alta mai slabă. Fenomenul poartă numele de structura fină a liniilor hidrogenului.

Faptul experimental observat era în contradicție cu teoria lui Bohr care arăta că fiecărui salt al electronului, de pe un nivel energetic pe altul, îi corespunde o singură linie spectrală.

Această complexitate a liniilor spectrale, incompatibilă cu numărul de nivele energetice prevăzute de teoria lui Bohr, l-a determinat pe Sommerfeld să considere pentru electron, în afară de orbita circulară și orbite eliptice. Ipoteza sa era conformă cu legile mecanicii clasice care

arată că traiectoria corpului care se mişcă sub influenţa unei forţe centrale este de fapt o elipsă, orbita circulară fiind un caz particular.

Noul model al atomului, propus de Sommerfeld, admite că electronul se învîrte în jurul nucleului pe o orbită eliptică care are nucleul în unul din focare (fig. 6.14). Pentru

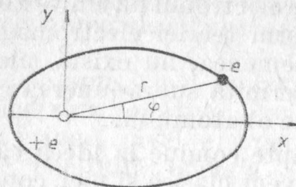


Fig. 6.14.

definirea mişcării electronului pe o elipsă sînt necesare două coordonate generalizate: unghiul polar φ şi raza vectoare r, cărora le corespund două condiţii cuantice,

$$\oint p_\varphi \, d\varphi = n_\varphi h,$$

$$\oint p_r \, dr = n_r h,$$

unde n_φ şi n_r sînt numărul cuantic azimutal, respectiv radial, iar p_φ şi p_r sînt impulsurile generalizate sau momentele cinetice corespunzătoare.

Ca şi în cazul cuantificării circulare, p_φ şi p_r se determină din relaţiile

$$p_\varphi = \frac{\partial W_c}{\partial \dot{\varphi}} \text{ şi } p_r = \frac{\partial W_c}{\partial \dot{r}},$$

unde $\dot{\varphi} = \partial \varphi / \partial t$, iar $\dot{r} = \partial r / \partial t$.

Pentru examinarea energiei cinetice, se observă că

$$x = r \cos\varphi \quad \text{şi} \quad y = r \sin\varphi$$

şi deci

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Întrucît

$$W_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2),$$

rezultă

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}, \text{ iar } p_r = m\dot{r}.$$

Cele două condiţii cuantice se vor scrie astfel

$$\oint mr^2\dot{\varphi} \, d\varphi = n_\varphi h,$$

$$\oint m\dot{r} \, dr = n_r h. \tag{6.12}$$

Din prima condiţie de cuantificare, rezultă

$$\int_0^{2\pi} mvr \, d\varphi = n_\varphi h \quad \text{sau} \quad p_\varphi = mvr = n_\varphi \frac{h}{2\pi},$$

care coincide cu condiţia (6.8) a lui Bohr de la cuantificarea pe un cerc, cu specificarea că n_φ coincide ca sens fizic cu numărul n din condiţia amintită.

Studiul celei de a doua din condiţiile de cuantificare, de mai sus, dă pentru starea staţionară energia

$$W = -\frac{2\pi^2 me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2 h^2},$$

identică cu relaţia (6.10) din teoria lui Bohr, cu specificarea că aici

$$n = n_\varphi + n_r, \tag{6.13}$$

unde n se numeşte număr cuantic principal.

Folosind aceste date, să determinăm care sînt orbitele posibile ale electronului, corespunzătoare unui anumit număr cuantic principal n. Pentru aceasta să observăm că n_φ intră în compunerea lui n ca termen. Valoarea $n_\varphi = 0$ nu este posibilă, întrucît din (6.12) ar rezulta $\dot{\varphi} = 0$ sau sau $\varphi = \text{const}$, adică mişcarea electronului s-ar face pe o dreaptă care trece prin nucleu, caz exclus de teoria lui Bohr. Valoarea $n_r = 0$ este posibilă, întrucît aceasta înseamnă $\dot{r} = 0$, deci $r = \text{const}$, ceea ce corespunde mişcării electronului pe un cerc.

Fie, de exemplu, $n = 3$. Pot exista următoarele trei combinaţii de valori pentru perechile de numere n_φ şi n_r:

$n_\varphi = 3$; $n_r = 0$ corespunde mişcării pe un cerc;

$n_\varphi = 2$; $n_r = 1$ şi $n_\varphi = 1$; $n_r = 2$ corespund mişcărilor pe două elipse avînd aceeaşi semiaxă mare, dar excentrici-

tăți diferite (fig. 6.15). Se observă că, spre deosebire de teoria lui Bohr, unde unui număr cuantic îi corespunde o orbită circulară, în teoria lui Sommerfeld, unui număr cuantic principal n îi corespund n orbite, dintre care una este un cerc și $n-1$ sînt elipse.

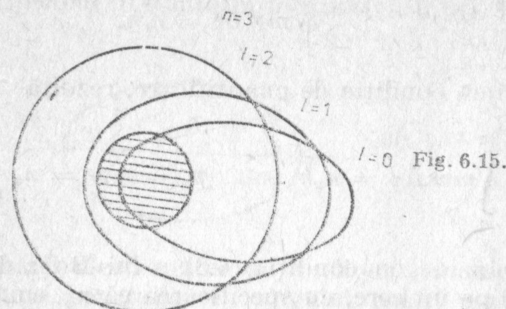


Fig. 6.15.

Din relația pentru energia stării staționare, se constată că această energie depinde de numărul cuantic principal n. Deoarece unui număr cuantic principal n îi corespund n stări cu aceeași energie, o asemenea situație se numește *degenerare*, iar stările (orbitele) respective se numesc *stări degenerate*. Stările degenerate corespunzînd aceleași energii, se deosebesc între ele prin numărul cuantic azimutal n_φ.

În spectroscopie se folosește în loc de n_φ, numărul cuantic secundar, definit de relația $l = n_\varphi - 1$. Rezultă că l ia valorile $l = 0; 1; 2; \ldots; n-1$, valoarea $l = n - 1$ este orbita circulară, iar $l = 0$ este ultima orbită eliptică. Se observă, de asemenea, că $n = n_r + l + 1$.

Totalitatea stărilor dintr-un atom care au aceeași energie formează o familie de stări, iar electronii de pe aceste stări formează o pătură de electroni. În acest fel, numărul cuantic principal n caracterizează pătura de electroni, determinînd nivelul energetic al păturii respective. În același timp, numărul cuantic secundar l deosebește o stare degenerată (numită și substrat sau subpătură) de alta, în cadrul aceleiași pături de electroni.

În spectroscopie, fiecare pătură de electroni, caracterizată printr-un anumit număr cuantic principal, se notează cu litere, astfel: $n = 1$ pătura K, $n = 2$ pătura L, $n = 3$ pătura M etc., în timp ce subpăturile dintr-o pătură se notează cu litere astfel:

$$l = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$s, p, d, f, \ldots$$

Folosind aceste notații, un nivel energetic se notează printr-un număr care are în dreapta o literă: numărul reprezintă numărul cuantic principal, iar litera reprezintă numărul cuantic secundar. De exemplu, $1s$ înseamnă că $n = 1$ (pătura K) și $l = 0$; pentru stratul L pot exista $2s$ și $2p$ corespunzătoare valorilor $l = 0$ și $l = 1$.

Mișcarea electronului pe o elipsă este o mișcare plană, iar pentru descrierea sa sînt suficiente cele două coordonate generalizate r și φ. Sub acțiunea unor cîmpuri omogene exterioare, de exemplu, un cîmp magnetic omogen exterior, mișcarea devine mai complicată, iar orbita eliptică are o mișcare de precesie. În acest caz pentru caracterizarea mișcării sînt necesare trei coordonate generalizate și întrucît cîmpul potențial al electronului este un cîmp sferic central, cele trei coordonate pot fi chiar coordonatele polare sferice: raza vectoare r, latitudinea θ și longitudinea ψ. Între coordonatele carteziene ale unui punct P (x, y, z) și coordonatele r, θ și ψ, există relațiile (fig. 6.16)

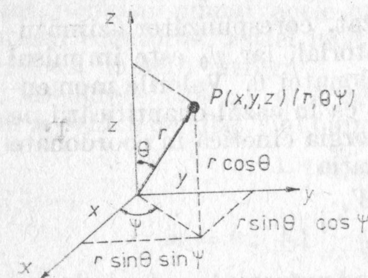


Fig. 6.16.

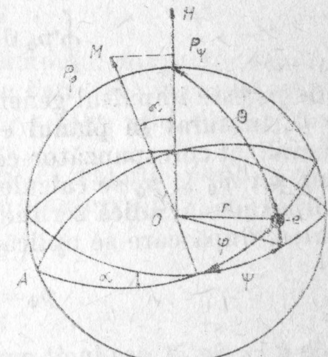


Fig. 6.17.

$$x = r \sin\theta \cos\psi, \quad y = r \sin\theta \sin\psi, \quad z = r \cos\theta.$$

Presupunem cîmpul exterior perturbator de mică intensitate, ceea ce determină ca orbita electronului să rămînă o elipsă, care face un unghi α cu planul ecuatorial (fig. 6.17). Fie OH direcția cîmpului magnetic exterior, care reprezintă o direcție privilegiată, OM normala la orbita perturbată AB, iar φ — azimutul măsurat în planul acestei orbite.

Se știe că valoarea momentului cinetic corespunzător azimutului φ este o mărime cuantificată, astfel că

$$p_\varphi = n_\varphi \frac{h}{2\pi}.$$

Dacă se introduc notațiile din mecanica cuantică, putem scrie

$$p_l = l\frac{h}{2\pi} \quad \text{sau} \quad p_l = \sqrt{l(l+1)}\,\frac{h}{2\pi},$$

unde l este numărul cuantic secundar, iar p_l este momentul cinetic orbital, datorat mișcării electronului pe orbita eliptică, în jurul nucleului.

Corespunzător celor trei coordonate generalizate, vor exista trei condiții de cuantificare

$$\oint p_r\,\mathrm{d}r = n_r h,$$

$$\oint p_\theta\,\mathrm{d}\theta = n_\theta h, \qquad (6.14)$$

$$\oint p_\psi\,\mathrm{d}\psi = n_\psi h,$$

unde p_ψ este impulsul generalizat, corespunzător azimutului ψ, măsurat în planul ecuatorial, iar p_θ este impulsul generalizat corespunzător coordonatei θ. Valorile momentelor p_r, p_θ și p_ψ se calculează ca în cazul cuantificării pe o elipsă plană, adică scriind energia cinetică în coordonate sferice, după care se aplică relația

$$p_\psi = \frac{\partial W_c}{\partial \dot{q}},$$

unde $\dot{q} = \partial q/\partial t$, așa încît q putînd reprezenta r, θ sau ψ.

Avînd în vedere că p_ψ este proiecția lui p_φ pe direcția cîmpului magnetic exterior, rezultă că

$$p_\psi = p_\varphi \cos\alpha.$$

Întrucît în timpul mișcării, $p_\varphi = \text{const}$, iar ψ este o coordonată ciclică, ultima din condițiile de cuantificare (6.14) se scrie

$$p_\psi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi = 2\pi\, p_\psi = n_\psi h, \text{ adică } p_\psi = n_\psi \frac{h}{2\pi}.$$

Așadar, proiecția momentului cinetic orbital pe direcția cîmpului are valori cuantificate, ceea ce înseamnă că orientarea în spațiu a orbitelor electronului nu se face la întîmplare. Într-adevăr, din figura 6.17 rezultă

$$\cos\alpha = \frac{p_\psi}{p_\varphi} = \frac{n_\psi \frac{h}{2\pi}}{n_\varphi \frac{h}{2\pi}} = \frac{n_\psi}{n_\varphi}$$

sau

$$n_\psi = n_\varphi \cos\alpha.$$

Numărul cuantic n_ψ, care definește mărimea proiecției momentului cinetic pe direcția cîmpului magnetic exterior și poziția suprafeței orbitei staționare în spațiu, se numește număr cuantic magnetic și se notează cu m. Introducînd numărul cuantic secundar l, în locul lui n_φ, rezultă

$$\cos\alpha = \frac{m}{l},$$

ceea ce arată că sub influența cîmpului magnetic extern sînt permise numai acele orbite care fac un unghi α cu planul ecuatorial, astfel încît $\cos\alpha$ este egal cu raportul a două numere întregi.

Deoarece $|\cos\alpha| \leqslant 1$, rezultă că valorile posibile ale lui m pentru un l dat, sînt cuprinse în intervalul

$$-l \leqslant m \leqslant +l$$

și deci

$$m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots;\ \pm l,$$

adică pentru o valoare dată a lui l, numărul cuantic magnetic ia $2l + 1$ valori diferite.

De asemenea, deoarece fiecărei valori a lui n îi corespunde o orientare a orbitei electronice în spațiu, rezultă că elipsa cu un l dat va putea avea $2l + 1$ orientări față de orbita ecuatorială. În același timp, momentul cinetic p_φ sau p_l, fiind perpendicular pe planul orbitei, se dispune și el numai în $2l + 1$ poziții diferite, față de direcția cîmpului magnetic exterior.

În figura 6.18 sînt arătate orientările posibile ale momentului cinetic orbital în raport cu direcția cîmpului magnetic exterior, pentru $l = 1;\ 2;\ 3$. Dacă $l = 1$,

$p_l = 1\frac{h}{2\pi}$, iar $m = -1; 0; +1$, fiind admise trei orientări posibile pentru p_l, din care una este pe direcţia cîmpului, alta în sens contrar acestuia şi a treia face un unghi de 90° cu primele două direcţii. Dacă $l = 2$, $p_l = 2\frac{h}{2\pi}$ şi $m = -2; -1; 0; +1; +2$, deci sînt admise cinci orientări pentru p_l, dacă $l = 3$ sînt admise şapte orientări pentru p_l etc.

De remarcat că p_l fiind un vector perpendicular pe planul orbitei, rezultă că şi $\vec{l}$, fiind coliniar cu $\vec{p}_l$ este un vector perpendicular pe planul aceleiaşi orbite, iar proiecţia sa pe direcţia cîmpului dă valoarea numărului cuantic magnetic. Datorită mişcării de precesie a orbitei, atît $\vec{p}_l$ cît şi $\vec{l}$ vor descrie o mişcare de precesie, o dată cu elipsa, în jurul cîmpului exterior (fig. 6.19). Şi, întrucît numărul cuantic magnetic depinde de l, se notează de obicei cu m_l,

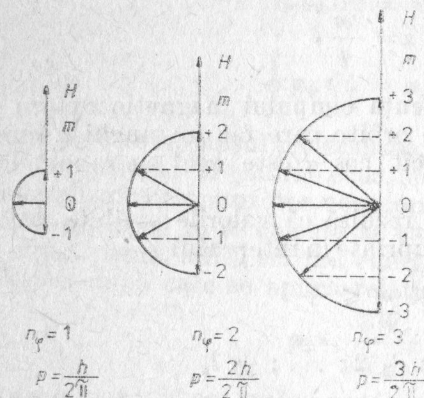


Fig. 6.18.

Fig. 6.19.

numit număr cuantic magnetic orbital şi este egal cu proiecţia lui $\vec{l}$ pe direcţia cîmpului.

Conform teoriei semicuantice a lui Bohr, mişcarea electronului pe elipsă este echivalentă cu un curent electric: $i = e/T = e\nu$, unde e este sarcina, iar T şi ν sînt perioada, respectiv frecvenţa de rotaţie a electronului. Existenţa acestui curent electric determină proprietăţi magnetice ale atomului, caracterizate prin momentul magnetic orbital,

$$\mu = i\,S,$$

adică egal cu produsul dintre intensitatea curentului electric, creat de sarcina e în mişcare, şi aria limitată de circuitul respectiv.

Considerînd, pentru simplitate, că electronul se deplasează pe o orbită circulară (rezultatul fiind acelaşi pentru o orbită eliptică), se poate scrie

$$i = e\,\nu = \frac{e\omega}{2\pi}, \text{ iar } S = \pi r^2$$

şi deci

$$\mu = i\,S = \frac{e\,\omega\,r^2}{2},$$

ω fiind viteza unghiulară a electronului. Să transformăm această relaţie, ţinînd seama de condiţia cuantică a lui Bohr,

$$p_\varphi = m_0\,vr = n_\varphi\frac{h}{2\pi}.$$

Înlocuind $v = \omega\,r$, se obţine $m_0\,vr = m_0\,\omega\,r^2$ şi deci

$$m_0\,\omega\,r^2 = l\frac{h}{2\pi},$$

unde am înlocuit pe n_φ cu numărul cuantic secundar l.

Se obţine pentru μ expresia

$$\mu = \mu_0\frac{e\,h}{4\,\pi\,m_0},$$

care arată că momentul magnetic al atomului este un multiplu întreg al mărimii

$$\mu_0 = \frac{e\,h}{4\pi\,m_0}.$$

Mărimea μ_0 se numeşte moment magnetic elementar sau magnetonul Procopiu-Bohr, a cărui valoare este

$$\mu_0 = 0{,}927 \cdot 10^{-23}\ \text{Joule.m}^2/\text{Web}.$$

Momentul magnetic

$$\mu = m\,\mu_0; \quad m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots \pm l,$$

datorat mişcării electronului pe orbită, poartă numele de moment magnetic orbital.

Prezenţa cîmpului magnetic are o deosebită influenţă asupra spectrului. Perturbind orbitele eliptice din atom,

fiecare stare ce avea energia W, în prezența cîmpului are energia $W + \Delta W$, energia suplimentară ΔW ducînd la desfacerea liniilor spectrale în mai multe componente. Într-adevăr, fenomenul a fost observat în cîmp magnetic în 1896 de către Zeeman, iar în cîmp electric în 1913 de către Stark.

Deși teoria orbitelor eliptice a lui Sommerfeld a prezis aceleași serii spectrale ca și teoria lui Bohr, explicînd într-un anumit fel complexitatea liniilor spectrale, această explicație nu este satisfăcătoare și nu concordă cu experiența, atunci cînd spectrele erau obținute cu aparate spectrale de foarte bună rezoluție.

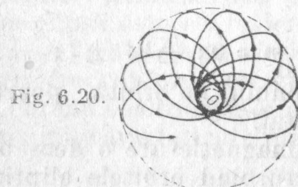
Rezolvarea problemei a fost dată tot de către Sommerfeld, grație mecanicii relativiste, ținînd seama că în mișcarea sa, în cîmpul coulombian al nucleului, viteza electronului variază substanțial în diferitele puncte ale elipsei.

Într-adevăr, în mișcarea pe elipsă, electronul se apropie sau se depărtează de nucleu, viteza sa variind în mod constant : este maximă la periheliu și minimă la afeliu. Avînd în vedere că teoria relativității restrînse consideră că masa corpului nu este o mărime absolută, ci variază cu viteza, conform relației

$$m = m_0 \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

unde m_0 este masa de repaus a corpului, iar c — viteza luminii în vid, rezultă că și masa electronului va varia o dată cu viteza.

În această situație, Sommerfeld a arătat că are loc o deplasare continuă a periheliului, ceea ce corespunde unei rotații continue a orbitei eliptice. Aceasta înseamnă că în atomul lui Sommerfeld, electronul nu parcurge doar o simplă elipsă, ci o orbită infinit mai complicată, de forma unei rozete, obținută în urma mișcării de precesie a elipsei în jurul focarului, cu o viteză unghiulară constantă (fig. 6.20).


Fig. 6.20.

Calculînd energia stării staționare, corespunzătoare unei pături de electroni, Sommerfeld găsește o relație de forma

$$W = -\frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2 h^2} + \mathcal{E}(n, l)$$

unde $\mathcal{E}(n, l)$ este un termen de corecție, rezultat ca urmare a variației masei electronului în mișcarea pe elipsă. Se observă că energia W a stării staționare depinde atît de numărul cuantic principal n, cît și de numărul cuantic secundar l, ceea ce înseamnă că pentru o valoare a lui n, corespund mai multe valori distincte ale lui W, corespunzătoare diferitelor valori pe care le poate lua l.

În acest fel, influența termenului $\mathcal{E}(n, l)$ constă în despicarea fiecărui nivel energetic din teoria lui Bohr, în cîteva nivele, apropiate între ele, numărul lor fiind egal cu cel al valorilor pe care le poate lua numărul cuantic secundar l.

Mai exact, conform modelului relativist de atom al lui Sommerfeld rezultă că fiecare linie spectrală din teoria lui Bohr reprezintă de fapt un sistem de linii fine care corespund trecerilor de pe nivelele stărilor superioare, caracterizate prin $n = n_2$ și $l = 0, 1, 2, 3, \ldots, n_2 - 1$, pe nivelele inferioare, caracterizate prin $n = n_1$ și $l = 0, 1, 2, 3, \ldots \ldots n_1 - 1$, unde $n_2 > n_1$.

În figura 6.21 se face o comparație a modului de emisie al liniilor spectrale în teoria lui Bohr (a) și teoria lui Sommerfeld (b). Se observă că liniei roșii H_α din teoria lui Bohr îi corespund 6 linii în teoria lui Sommerfeld și aceasta, întrucît nivelul $n = 3$ cuprinde subnivelele 3s, 3p și 3d, iar nivelul $n = 2$ cuprinde subnivelele 2s și 2p.

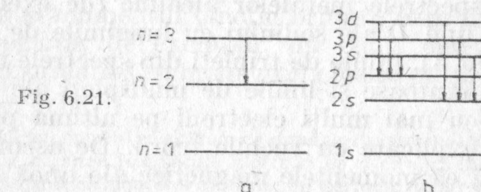


Fig. 6.21.

Trebuie să remarcăm că folosirea unor spectrografe cu mare putere de rezoluție pentru studierea spectrelor de emisie, deși a arătat că structura fină este un fapt real, numărul liniilor observate experimental este mai mic decît cel dat de teoria lui Sommerfeld. De exemplu, pentru

linia H_α teoria arată că ea ar trebui să aibă șase componente, în timp ce experiența nu verifică acest rezultat, ceea ce înseamnă că nu toate tranzițiile electronice sînt posibile în practică.

Pentru a apropia rezultatele teoretice de cele experimentale, Rubinovicz introduce regula de selecție, conform căreia sînt posibile numai acele tranziții pentru care $\Delta l = \pm 1$. În acest fel, fiecare linie din seria Balmer este formată din trei componente, în timp ce liniile seriei Lyman sînt linii unice.

Deși mai generală decît teoria lui Bohr, teoria lui Sommerfeld are și ea o serie de limite. Așa, de exemplu, teoria lui Sommerfeld combinată cu regula de selecție a lui Rubinovicz prezice trei componente pentru linia H_α a hidrogenului, în timp ce în practică se observă patru componente. Apoi, teoria nu poate explica spectrele atomilor metalelor alcaline și comportarea atomului în cîmp magnetic, precum și variația intensității liniilor spectrale în spectrele de emisie. Teoria nu a putut da o explicație completă nici măcar pentru cel mai simplu atom după hidrogen — atomul de heliu, care are doi electroni în învelișul electronic.

Pentru rezolvarea cel puțin parțială a acestor probleme a fost necesară introducerea altor numere cuantice, care să reflecte proprietățile atomului și a componentelor sale.

6.1.5. Modelul vectorial al atomului

Studiul structurii fine a liniilor spectrale în cîteva cazuri a arătat că ipoteza orbitelor eliptice a lui Sommerfeld nu furnizează o explicație adecvată. În particular, liniile de dubleți din spectrele metalelor alcaline (de exemplu, binecunoscutele linii D ale sodiului cu lungimile de undă de 5890 Å și 5896 Å), liniile de tripleți din spectrele metalelor alcalino-pămîntoase și liniile de multipleți ale spectrelor atomilor cu mai mulți electroni pe ultima pătură nu au putut fi explicate cu vechile teorii. De asemenea, experiența arată că momentele magnetice ale unor atomi nu sînt multipli întregi ai magnetonului Procopiu-Bohr.

În 1925, Goudsmit și Uhlenbeck, folosind o sugestie a lui Pauli, au postulat că electronul, în afară de mișcarea orbitală pe elipsă, în jurul nucleului, prezintă și o mișcare în jurul axei proprii. Situația este analoagă cu a Pămîntului sau a altor planete care se rotesc atît în jurul Soarelui (mișcarea anuală), cît și în jurul propriilor axe (mișcare diurnă). Noua mișcare de rotație a fost denumită spin, care în limba engleză înseamnă rotire și ea s-a dovedit răspunzătoare pentru dublarea nivelelor energetice.

La fel ca și mișcarea orbitală a electronului, care a introdus un moment cinetic orbital,

$$p_l = \sqrt{l(l+1)}\,\frac{h}{2\pi},$$

și un moment magnetic orbital

$$\mu = l\mu_0,$$

mișcarea de spin introduce și ea un moment cinetic propriu, numit spin, care în concepția mecanicii ondulatorii este (v. 6.1.6)

$$p_s = \sqrt{s(s+1)}\,\frac{h}{2\pi}$$

și un moment magnetic propriu,

$$\mu_s = \pm\,\mu_0,$$

unde s reprezintă numărul cuantic de spin [1].

Comparînd raporturile pentru cele două mișcări ale electronului, rezultă

$$\left(\frac{\mu}{p}\right)_s = 2\left(\frac{\mu}{p}\right)_l,$$

adică raportul μ/p pentru mișcarea de spin este dublu față de același raport ce corespunde mișcării orbitale.

Ca și momentul cinetic orbital, care față de o direcție privilegiată, de exemplu, un cîmp magnetic extern, ia $2l + 1$ orientări, și momentul cinetic propriu va lua $2s + 1$

---

[1] Este momentul să arătăm că după postularea celor patru numere cuantice (n, l, m, s) au fost făcute încercări de a explica științific periodicitatea proprietăților elementelor în sistemul periodic. Bohr enunță primul ideea, în 1921, că periodicitatea proprietăților elementelor se datorează aranjării electronilor într-un anumit fel în straturi, în jurul nucleului.

Un pas important în explicarea modului de aranjare a electronilor în pături este făcut de Pauli, care enunță următorul principiu, numit principiul de excluziune a lui Pauli : într-un atom nu pot exista doi electroni care să aibă aceleași numere cuantice. Deci, după acest principiu, fiecare din electronii unui atom se vor deosebi prin cel puțin unul dintre cele patru numere cuantice.

orientări. Întrucît toţi termenii spectrali ai sodiului, cu excepţia termenilor $s(l = 0)$, sînt dubli, înseamnă că momentul cinetic propriu are de fapt numai două orientări şi deci $2s + 1 = 2$, adică $s = 1/2$ (în unităţi $h/2\pi$).

Aşa cum momentul cinetic orbital poate fi caracterizat prin vectorul $\vec{l}$, tot astfel, momentul cinetic propriu (de spin) poate fi caracterizat prin vectorul $\vec{s}$. Proiectînd momentul cinetic propriu după o direcţie privilegiată, de exemplu, cîmpul magnetic creat de deplasarea electronilor pe orbitele din jurul nucleului, vectorul $\vec{s}$ poate avea două orientări : una paralelă şi alta antiparalelă cu direcţia dată. Aceste două proiecţii, cuantificate şi ele, sînt caracterizate de numărul cuantic magnetic de spin m_s, care poate lua valorile $\pm 1/2$.

Aşadar, cele două proiecţii ale momentului cinetic propriu pe direcţia privilegiată, au valorile

$$+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi} \quad \text{şi} \quad -\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}.$$

Faptul că există un moment cinetic orbital şi un moment cinetic propriu, cărora le corespund numerele cuantice l şi s, precum şi vectorii $\vec{l}$ şi $\vec{s}$, se pune problema compunerii celor două mişcări : orbitală şi de spin.

Presupunem, mai întîi, cazul relativ simplu, al atomului cu un singur electron. Întrucît trebuie să compunem doi vectori, rezultatul va fi tot un vector,

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s},$$

unde $\vec{j}$ este vectorul momentului cinetic orbital,

$$p_j = \sqrt{j(j+1)}\,\frac{h}{2\pi},$$

j fiind numărul cuantic intern.

Deoarece $\vec{s}$ poate avea două orientări faţă de $\vec{l}$, una paralelă şi alta antiparalelă, rezultă că pentru un l dat, j poate avea valorile

$$j = l + \frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad j = l - \frac{1}{2},$$

deci, pentru fiecare valoare a lui l, corespund două valori pentru j.

În cazul atomului cu doi sau mai mulţi electroni, problema obţinerii momentului cinetic total este ceva mai

complicată şi se face folosind aşa-numitul model vectorial al atomului, ale cărui elemente sînt cunoscute sub formă de vectori. Pentru simplitate, vom considera cazul elementelor care au în subpătura exterioară doi electroni, cum sînt de exemplu, He I, Li, Be III care au numai doi electroni în afara nucleului, precum şi elementele alcalino-pămîntoase şi Zn, Cd, Hg etc. Starea atomilor acestor elemente este determinată numai de cei doi electroni periferici, numiţi şi electroni de valenţă. Electronii de valenţă au un rol activ în producerea spectrelor de emisie ale atomilor excitaţi. Ceilalţi electroni ai atomului cu doi electroni de valenţă formează pături închise, pentru care momentele rezultante sînt nule.

Fie unul dintre cei doi electroni aflaţi pe o orbită pentru care numărul cuantic intern este l_1, iar numărul cuantic de spin s_1. Celălalt electron are, în mod corespunzător, numerele cuantice l_2 şi s_2.

Pentru aflarea momentului cinetic total, se poate proceda în două moduri. Dacă interacţiunea dintre „spin" şi „orbită" nu este atît de puternică, se însumează separat momentele cinetice orbitale, separat momentele cinetice de spin ale fiecărui electron, iar momentul cinetic total se obţine prin însumarea celor două momente cinetice, orbital şi de spin. Acest mod de compunere se aplică atomilor nu prea grei şi se numeşte cuplaj normal, cuplaj LS sau cuplaj Russell-Saunders.

Dacă $\vec{l}_1$ şi $\vec{l}_2$ sînt vectorii momentelor orbitale, corespunzători celor doi electroni, atunci vectorul momentului cinetic orbital al sistemului, va fi

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2,$$

iar momentul cinetic orbital rezultant,

$$p_L = \sqrt{L(L+1)}\,\frac{h}{2\pi}.$$

În acelaşi timp, dacă $\vec{s}_1$ şi $\vec{s}_2$ sînt vectorii momentelor cinetice de spin ai celor doi electroni, vectorul momentului cinetic de spin total va fi

$$\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2,$$

iar momentul cinetic de spin rezultant,

$$p_S = \sqrt{S(S+1)}\,\frac{h}{2\pi}.$$

Momentul cinetic total al sistemului este dat de suma geometrică a rezultantei momentului orbital $\vec{p}_L$ și a rezultantei momentului propriu $\vec{p}_S$ al sistemului,

$$\vec{p}_J = \vec{p}_L + \vec{p}_S.$$

Momentele rezultante $\vec{p}_L$ și $\vec{p}_S$ formează între ele unghiuri pentru care momentul cinetic total ia valorile

$$p_J = \sqrt{J(J+1)}\,\frac{h}{2\pi}.$$

Vectorul corespunzător acestui moment fiind

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S},$$

să vedem care sînt valorile pe care le poate lua $\vec{J}$. Pentru aceasta, să observăm că dacă atomul este neexcitat, cei doi electroni optici se află în starea s, pentru care $l = 0$. Dacă atomul este excitat, cei doi electroni se pot afla în starea p sau într-o stare superioară, pentru care l are o valoare finită.

De asemenea, să observăm că vectorii $\vec{l}_1$ și $\vec{l}_2$ nu pot avea orice fel de orientări între ei. Ei trebuie să fie orientați astfel încît vectorul $\vec{L}$ să aibă modulul egal cu un număr întreg. În același timp, deoarece $\vec{s}_1$ și $\vec{s}_2$ neputînd fi decît paraleli sau antiparaleli între ei, rezultă că $\vec{S} = 0$ cînd spinii celor doi electroni sînt antiparaleli și $\vec{S} = 1$, cînd spinii sînt paraleli. Deci, valoarea lui $\vec{S}$ poate fi zero sau unu.

Ca prim exemplu, să considerăm $l_1 = 1$ și $l_2 = 0$, deci $\vec{L} = 1$. Prin urmare, prin adunare vectorială, deoarece $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, cînd $\vec{L} = 1$ și $\vec{S} = 0$, se obține $\vec{J} = 1$, ceea ce corespunde unui nivel de singlet pentru atomul respectiv, fapt notat cu $1P_1$.

În cazul în care $\vec{L} = 1$ și $\vec{S} = 1$ pot exista trei situații diferite care dau pentru $\vec{J}$ valorile 2, 1 sau 0 (fig. 6.22)

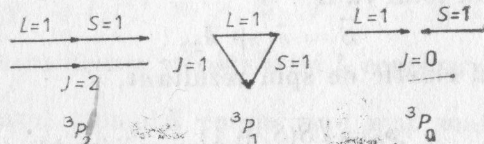


Fig. 6.22.

existînd trei nivele energetice diferite, deci un triplet pe care îl vom nota astfel: $^3P_2$, $^3P_1$, $^3P_0$, indicele din stînga sus arătînd multiplicitatea termenului (singlet, triplet), iar indicele din dreapta jos arată valoarea numărului cuantic J.

Să considerăm acum, ca al treilea exemplu, situația cînd $l_1 = l_2 = 1$. Vectorul momentului cinetic orbital fiind $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$, poate lua valorile 0, 1 sau 2 (fig. 6.23, a), iar stările corespunzătoare sînt S, P sau D. Fie mai întîi $\vec{S} = 0$. Rezultă pentru $\vec{L} = 2$ și $\vec{S} = 0$,

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = 2,$$

adică se obține singletul $^1D_2$. Pentru $\vec{L} = 2$ și $\vec{S} = 1$, valoarea lui $\vec{J}$ se obține din suma vectorială $\vec{L} + \vec{S}$.

Din figura 6.23, b se observă că J poate lua valorile 1, 2 sau 3, existînd deci tripleții: $^3D_1$, $^3D_2$, $^3D_3$. Tranzițiile dintre nivele au loc astfel încît sînt respectate regulile de selecție $\Delta J = 0, \pm 1$.

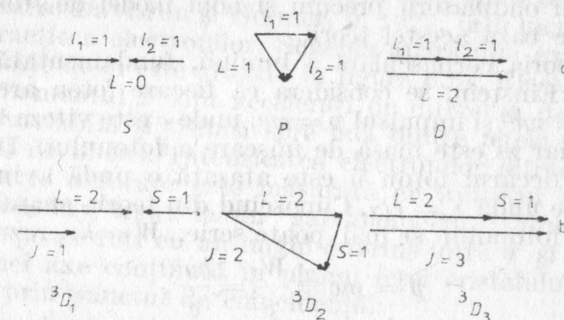


Fig. 6.23.

Atomilor cu un număr de electroni de valență mai mare, deci atomi mai grei, pentru care interacțiunea „spin" — „orbită" este foarte puternică, li se aplică cuplajul JJ. În cazul acestui tip de cuplaj, se însumează mai întîi, separat, momentul orbital cu cel de spin pentru fiecare electron și apoi se însumează rezultatele, obținîndu-se momentul cinetic total. Toate aceste rezultate au o importanță deosebită în spectroscopie, la interpretarea nivelelor energetice posibile ale atomilor, la sistematizarea unor elemente și combinații ale acestora etc.

6.1.6. Modelul ondulatoriu al atomului

Aşa cum s-a arătat mai înainte, atît teoria lui Bohr cît şi completările aduse ulterior de Sommerfeld, au o serie de imperfecţiuni, neputînd explica toate faptele experimentale, observate la nivelul atomului, ceea ce au determinat noi încercări de a pune de acord teoria cu experienţa. Însuşi Bohr considera că teoria sa cuantică nu trebuie considerată ca o teorie definitivă. Realitatea era că multe fapte experimentale acumulate nu găseau un fundament ştiinţific în vechile teorii. Acest lucru a necesitat revizuirea critică a bazelor teoriei cuantice vechi şi în general, a concepţiilor despre natura particulelor elementare.

Bazele noii teorii au fost formulate aproape în acelaşi timp, între anii 1923—1927, de către de Broglie şi Schrödinger (mecanica cuantică ondulatorie) şi Heisenberg (mecanica cuantică matriceală). Deşi punctele de plecare ale celor două teorii sînt diferite, rezultatele la care ajung sînt aceleaşi.

În cele ce urmează, vom trata pe scurt principiile mecanicii ondulatorii precum şi noul model de atom construit pe baza acestei teorii.

În teoria corpusculară a luminii, fundamentată ştiinţific de Einstein, se considera că fiecare foton are energia $W = mc^2$ şi impulsul $p = mc$, unde c este viteza luminii în vid, iar m este masa de mişcare a fotonului. De asemenea, fiecărui foton îi este ataşată o undă avînd lungimea de undă $\lambda = c/\nu$. Cunoscînd din teoria cuantelor că energia fotonului se mai poate scrie, $W = h\nu$, rezultă că

$$p = mc = \frac{W}{c} = \frac{h\nu}{c},$$

unde h este constanta lui Planck.

Se constată că unda luminoasă are lungimea de undă

$$\lambda = \frac{h}{mc},$$

relaţie care rezolvă complet contradicţia dintre teoria corpusculară şi teoria ondulatorie a luminii, scoţînd în evidenţă dublul caracter, de corpuscul şi de undă a luminii.

Cunoscînd că lumina, care este o undă electromagnetică, are şi o natură corpusculară, în 1924 Louis de Broglie, îşi pune problema dacă nu este posibil ca şi substanţa, pe lîngă natura corpusculară, să posede şi proprietăţi ondulatorii.

Admiţînd ipoteza că substanţa are un caracter dual, de corpuscul şi de undă, de Broglie generalizează relaţiile de mai sus şi găseşte că unda asociată unei particule de substanţă, are lungimea de undă

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}, \tag{6.15}$$

unde m este masa, iar v — viteza particulei. De observat că unda asociată particulelor de substanţă, numită şi undă de Broglie, nu este de natură electromagnetică şi deci nu trebuie confundată cu aceasta.

În concepţia lui de Broglie, oricărui corp de masă m care se mişcă cu viteza v, i se poate asocia o undă de Broglie, a cărei lungime de undă depinde de masa corpului respectiv.

Ipoteza undei asociate de Broglie a fost strălucit verificată de către Davisson şi Germer, în 1927, prin lucrările lor de difracţie a electronilor. Schema aparatului experimental folosit de ei este arătată în figura 6.24. Electronii emişi de filamentul F sînt acceleraţi de diferenţa de potenţial U variabilă şi trimişi spre una dintre feţele unui monocristal de nichel. Intensitatea electronilor difractaţi într-o direcţie oarecare este măsurată cu ajutorul unui cilindru Faraday legat la un galvanometru. Cilindrul Faraday se poate roti cu un unghi cuprins între 0° şi 90°, în jurul unei axe conţinută în planul feţei cristalului şi care trece prin punctul de coincidenţă.

Experienţele au arătat că pentru fiecare tensiune de accelerare U, maximul intensităţii electronilor difuzaţi, se obţine pentru un anumit unghi. Cel mai intens maxim se obţine pentru $U = 54$ volţi şi un unghi de 50° faţă de direcţia fasciculului incident.

Avînd în vedere că energia cinetică a electronilor este

$$\frac{1}{2} m v^2 = e U$$

şi că lungimea undei asociate este $\lambda = h/mv$, se obţine

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\, Uem}}.$$

Înlocuind în această relaţie constantele cunoscute, se găseşte că

$$\lambda = 6{,}6\cdot 10^{-34}/\sqrt{2\times 54\times 1{,}6\times 10^{-19}\times 9{,}1\times 10^{-31}} = $$
$$= 1{,}67\times 10^{-10}\ \text{m} = 1{,}67\ \text{Å},$$ adică de acelaşi ordin de mărime cu lungimea de undă a radiaţiei X moi.

Prin înlocuirea fasciculului de electroni cu un fascicul de radiaţii X moi, s-a constatat că unghiul de difuzie era aproape egal cu cel constatat în cazul folosirii electronilor.

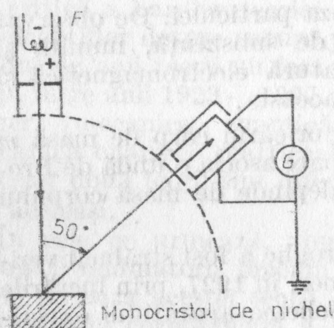


Fig. 6.24.

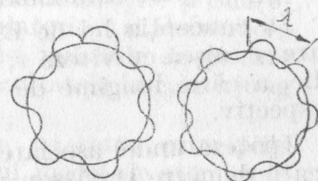


Fig. 6.25.

Fenomenul reprezintă o reflexie selectivă a electronilor şi poate fi explicat, dacă se admite că unda asociată atomului suferă reflexii atît pe faţa superioară a cristalului, adică pe primul plan reticular, cît şi pe planele aflate în interiorul cristalului. Apariţia maximelor şi mininelor intensităţii fasciculului de electroni, la reflexia lor pe diferite plane reticulare, poate fi înţeleasă admiţînd că electronii suferă un proces de reflexie prin interferenţă, adică se comportă ca nişte unde.

Ipoteza undei asociate a lui de Broglie permite găsirea condiţiei de cuantificare a lui Bohr, fără introducerea postulatelor sale. Şi anume, înlocuind electronul, în mişcarea pe orbită, cu unda sa asociată, pentru ca această undă să nu se anuleze prin interferenţă, adică electronul să parcurgă o orbită stabilă, este necesar ca unda respectivă să fie o undă staţionară. Conform teoriei ondulatorii, sînt stabile sau permise numai acele orbite, care conţin un număr întreg de lungimi de undă, în caz contrar, orbitele sînt nestabile (fig. 6.25).

Notînd cu n numărul de lungimi de undă λ, orbita stabilă are lungimea $2\pi r = n\lambda$, r fiind raza orbitei. Înlocuind în această expresie pe λ din (6.15), se obţine $2\pi r = nh/mv$ şi deci

$$mvr = n\frac{h}{2\pi},$$

adică am obţinut condiţia cuantică a lui Bohr (6.8), pe o cale mult mai logică.

Faptul că microparticulele prezintă şi proprietăţi ondulatorii, pentru caracterizarea lor trebuie folosite atît mărimi ce definesc un corpuscul (masa, impulsul), cît şi mărimi ondulatorii (lungimea de undă, frecvenţa).

În acelaşi timp, contradicţiile dintre proprietăţile corpusculare şi cele ondulatorii ale microparticulelor se exclud reciproc. Justeţea acestei afirmaţii rezultă din compararea fenomenelor ce au loc la trecerea dintr-un mediu în altul, pentru lumină şi separat pentru electroni. Ajungînd la suprafaţa de separaţie dintre două medii optic diferite, o parte din lumină, considerată ca o undă, se reflectă, iar alta se refractă. Dacă se face aceeaşi experienţă cu fascicule de electroni, fiecare dintre electroni neputînd fi divizat, pentru a-şi păstra integritatea, un electron va suferi fie fenomenul de reflexie, fie fenomenul de refracţie.

În experienţele de interferenţă a luminii monocromatice, energia luminoasă primită într-un punct este proporţională cu pătratul amplitudinii cîmpului electric al undei luminoase. Din punct de vedere corpuscular, se poate spune că aceeaşi energie este proporţională cu numărul de fotoni ce ajung în punctul respectiv, ceea ce înseamnă că în locurile luminoase ale franjei de interferenţă vor ajunge mai mulţi fotoni decît în locurile întunecate. Mai mult, acest rezultat arată că probabilitatea ca un foton să lovească placa fotografică în locul unei franje luminoase este mai mare decît în locul franjei întunecate.

O descriere asemănătoare poate fi aplicată şi pentru cazul difracţiei electronilor pe reţeaua cristalină. Probabilitatea ca un electron să lovească un punct dat de pe placa fotografică este proporţională cu pătratul amplitudinii undei de Broglie, asociată electronului. Folosind această idee, starea unei microparticule sau sistem de microparticule poate fi descrisă cu ajutorul funcţiei complexe, numită funcţia de undă ψ, al cărei modul este egal cu

amplitudinea Ψ a undei de Broglie, asociată microparticulei.

Max Born interpretează funcția de undă, postulînd că pătratul amplitudinii undei într-un punct este proporțional cu probabilitatea pentru ca electronul să se afle într-un element de volum $\mathrm{d}V$, la momentul considerat. Reciproc, probabilitatea ca electronul să se afle la un moment dat în elementul de volum $\mathrm{d}V$ din jurul unui anumit punct din spațiu este

$$\mathrm{d}P = |\Psi|^2 \,\mathrm{d}V,$$

unde $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$, este pătratul modulului amplitudinii complexe a funcției de undă, egal cu produsul dintre Ψ și mărimea imaginar conjugată Ψ^*.

Mărimea

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} = |\Psi|^2$$

este densitatea de probabilitate.

Legat de interpretarea dată de Born, în cazul reflexiei și refracției, există o anumită probabilitate pentru ca un electron dintr-un fascicul să sufere fie fenomenul de reflexie, fie fenomenul de refracție.

Faptul că pătratul modulului amplitudinii funcției de undă este proporțional cu variația probabilității de localizare a microparticulei conduce la o deosebire netă în ceea ce privește noțiunea de orbită, din mecanica cuantică veche a lui Bohr și cea din mecanica cuantică ondulatorie. În sensul teoriei lui Bohr, orbita reprezintă o linie bine determinată, în timp ce în mecanica cuantică ondulatorie, noțiunea de orbită este înlocuită cu aceea de nor electronic, unde densitatea de probabilitate de localizare a electronului este maximă. În conformitate cu această reprezentare, a fost propus un nou model al atomului — modelul ondulatoriu, care concepe că atomul este format dintr-un nucleu cu sarcină pozitivă, în jurul căruia se găsește un nor electronic, format din electroni ce gravitează în jurul nucleului.

Deși de Broglie a emis primul ideea undei asociate microparticulei în mișcare, el nu a reușit să construiască un formalism matematic, care să conțină ecuația de mișcare a undei, așa cum este ecuația lui Newton pentru macroparticule. În 1926, Schrödinger formulează primul

o ecuație diferențială pentru unda asociată microparticulei, ținînd seama de dublul ei caracter : de undă și de corpuscul.

În acest scop, să considerăm, pentru simplitate, o undă plană care se propagă de-a lungul axei x cu viteza de fază u. Notăm cu ψ deplasarea (perturbația) față de poziția de echilibru la momentul t. Ecuația diferențială care descrie această mișcare ondulatorie este

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{6.16}$$

Soluția acestei ecuații este de forma unei simple funcții armonice de timp,

$$\psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z)\cos\frac{2\pi}{T}t$$

sau

$$\psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z)\exp[-\mathrm{i}\,\omega\, t], \tag{6.17}$$

unde $\omega = 2\pi\nu$, ν fiind frecvența, iar Ψ este amplitudinea mișcării ondulatorii.

Diferențiind soluția (6.17) de două ori, în raport cu timpul, se obține

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\,\omega^2\Psi\exp[-\mathrm{i}\omega t] = -\,\omega^2\psi,$$

astfel încît ecuația (6.16) devine

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2\psi}{u^2} = -\frac{4\pi^2\nu^2\psi}{u^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\cdot\psi, \tag{6.18}$$

deoarece $u = \nu\lambda$. Folosind expresia pentru λ din formula lui de Broglie $\lambda = h/mv$, unde m este masa microparticulei, iar v este viteza sa de mișcare de-a lungul axei x (vitezele v și u nu sînt identice), ecuația (6.18) devine

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\left(\frac{mv}{\hbar}\right)^2\psi, \tag{6.19}$$

unde $\hbar = h/2\pi$.

Dacă avem în vedere că fiecare microparticulă ce posedă energia totală

$$W = \frac{1}{2}\,mv^2 + W_p,$$

unde $\frac{1}{2}mv^2$ și W_p sînt energia cinetică, respectiv energia potențială, se obține

$$mv = \sqrt{2(W - W_p)m}$$

și deci ecuația (6.19) se scrie

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{2(W - W_p)}{\hbar^2}\psi$$

sau

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(W - W_p)\psi = 0. \qquad (6.20)$$

Ținînd seama că $\psi = \Psi \exp[-i\omega t]$, după împărțirea prin $\exp[-i\omega t]$, ecuația (6.20) devine

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(W - W_p)\Psi = 0, \qquad (6.21)$$

care reprezintă ecuația de undă a lui Schrödinger unidimensională și independentă de timp.

Dacă se are în vedere faptul că o undă se propagă în toate direcțiile, ultima ecuație extinsă pentru spațiul tridimensional se scrie astfel

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(W - W_p)\Psi = 0$$

sau

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(W - W_p)\Psi = 0, \qquad (6.22)$$

unde

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

este operatorul diferențial în coordonate carteziene (laplaceian), aplicat funcției Ψ.

Trebuie să menționăm că cele de mai sus nu constituie o deducere a ecuației lui Schrödinger. De fapt, s-au făcut cîteva presupuneri, adoptîndu-se un anumit formalism, care reprezintă o generalizare a ceea ce se întîmplă în cazul mișcării unei particule libere, descrisă de unda de Broglie. Toate acestea au permis „inducerea" și deci postularea acestei ecuații. Valabilitatea acestei ecuații

rezultă din concordanța consecințelor sale cu datele experimentale.

Un succes deosebit al ecuației lui Schrödinger a constat în faptul că ea a putut fi aplicată atît atomului de hidrogen cît și atomilor mai grei, care au mai mulți electroni, de exemplu, atomii hidrogenoizi. În continuare, vom arăta modul cum se aplică această ecuație pentru un atom hidrogenoid și care sînt avantajele aplicării noii teorii cuantice, față de vechea teorie, a lui Bohr.

Desigur că datorită simetriei sferice a interacțiunii dintre nucleu și electron, în locul coordonatelor carteziene este mai comod să se lucreze cu coordonatele sferice r, θ și φ, avînd nucleul în punctul de origine. Expresia operatorului diferențial în sistemul de coordonate sferice, aplicat funcției Ψ, are forma

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\cot\theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}.$$

Pentru studiul mișcării în cîmp central, de exemplu, mișcarea electronului în cîmpul nucleului, în ecuația (6.22) se înlocuiește $\nabla^2 \Psi$ prin expresia acestuia în coordonate sferice și energia potențială W_p prin expresia acesteia în respectivul cîmp central. Se caută apoi acele soluții ale ecuației astfel obținute, care îndeplinesc condițiile standard, adică de continuitate, mărginire, univocitate și ortonormare. În general, în mișcarea în cîmp central neexistînd suprafețe de discontinuitate, condițiile cele mai importante sînt cele de mărginire și univocitate pentru variabilele unghiulare și ortonormarea. Aceste condiții înlocuiesc ca efect postulatul lui Bohr cu privire la stările staționare.

Considerăm că, la un moment dat, electronul avînd sarcina $(-e)$ se află la distanța r față de nucleul de sarcină $(+Ze)$. Energia potențială a electronului în cîmpul nucleului, presupus cu masă infinită, este

$$W_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Folosind aceste elemente, ecuația lui Schrödinger (6.22) devine

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2}\cot\theta\,\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} +$$

$$+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2}\left(W + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\Psi = 0. \quad (6.23)$$

Soluțiile acestei ecuații cer ca funcția de stare Ψ să fie finită în tot spațiul, să fie funcție continuă de coordonatele $(r,\ \theta,\ \varphi)$ și să admită derivate continue de ordinul întîi. Aceste cerințe înlocuiesc, ca efect, postulatul lui Bohr cu privire la stările staționare.

Soluția completă a ecuației (6.23) este complicată. Este însă suficient să arătăm aici că ea poate fi separată convenabil în alte trei ecuații, dacă se ia Ψ sub forma

$$\Psi = F_1(r)\,F_2(\theta)F_3(\varphi).$$

Se obține

$$\frac{d^2F_1(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dF_1(r)}{dr} + \frac{2m_e}{\hbar^2}\left(W + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)F_1(r) = 0, \quad (6.24)$$

unde $F_1(r)$ este funcție numai de r,

$$\frac{d^2F_2(\theta)}{d\theta^2} + \cot\theta\,\frac{dF_2(\theta)}{d\theta} + l(l+1)F_2(\theta) - \frac{m_l^2F_2(\theta)}{\sin^2\theta} = 0, \quad (6.25)$$

unde $F_2(\theta)$ este funcție numai de θ, iar m_l și l sînt constante, și

$$\frac{d^2F_3(\varphi)}{d\varphi^2} + m_l^2F_3(\varphi) = 0, \quad (6.26)$$

unde $F_3(\varphi)$ este funcție numai de φ.

Condițiile standard, pe care trebuie să le îndeplinească, conduc la cerințele ca l să aibă valori întregi nenegative, adică $0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ \ldots$, iar m_l să ia valorile $0\,;\ \pm1\,;\ \pm2\,;\ \ldots\ \ldots\,;\ \pm\,l$.

Soluția ecuației (6.24) funcție de r permite găsirea valorilor energiei pentru stările staționare ale atomului de hidrogen, obținîndu-se aceeași expresie ca și aceea dată de teoria lui Bohr.

Studiind soluția ecuației (6.25) se poate arăta că $\sqrt{l(l+1)}$ este mărimea numărului cuantic orbital l, introdus în teoria orbitelor eliptice, și că m_l este mărimea numărului cuantic magnetic m_l, toate introduse mai întîi în teoria lui Sommerfeld. Mecanica cuantică cere ca mărimile corespunzătoare vectorilor $\vec{l}$ și $\vec{s}$ să nu fie l și s^2, ci $\sqrt{l(l+1)}$ și $\sqrt{s(s+1)}$. De asemenea, avînd în vedere posibilitatea compunerii vectoriale a vectorilor $\vec{l}$ și $\vec{s}$ pentru a obține vectorul $\vec{j}$, corespunzător numărului cuantic intern, rezultă că

$$\sqrt{j(j+1)} = \sqrt{l(l+1)} + \sqrt{s(s+1)}.$$

Credem că este instructiv să considerăm o situație mai simplificată pentru atomul de hidrogen și anume situația cînd Ψ variază numai cu raza vectoare r. Din cele trei ecuații separate, singura care este necesară este ecuația (6.24) și care poate fi scrisă astfel:

$$\frac{d^2\Psi}{d^2r} + \frac{2}{r}\frac{d\Psi}{dr} + \frac{2m_e}{\hbar^2}\left(W + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\Psi = 0. \quad (6.27)$$

Cea mai simplă soluție a acestei ecuații este de forma

$$\Psi = \exp(-ra),$$

unde a este o constantă, soluția satisfăcînd astfel ecuația (6.27), încît Ψ tinde la zero pentru distanțe r mari ale electronului față de nucleu. Substituind această soluție în (6.27) și împărțind prin $\exp\,(-ra)$, se obține

$$a^2 - \frac{2a}{r} + \frac{2m_e}{\hbar^2}\left(W + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = 0.$$

[2] De remarcat că teoria ondulatorie a atomului nu postulează numărul cuantic de spin și nici vreun punct de vedere relativist. Bazele teoriei mișcării relativiste ale electronului au fost puse de Dirac, în ale cărui ecuații există o serie de termeni ce includ spinul electronului.

Pentru ca această ecuație să fie adevărată pentru orice valori ale lui r, este necesar ca suma termenilor independenți de r să fie nulă, adică

$$a^2 + \frac{2m_e W}{\hbar^2} = 0. \tag{6.28}$$

Coeficientul lui $1/r$ poate fi, de asemenea, egal cu zero. Rezultă

$$-2a + \frac{2m_e}{\hbar^2}\cdot\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} = 0,$$

de unde

$$a = \frac{m_e Z e^2}{4\pi\hbar^2\varepsilon_0}. \tag{6.29}$$

Înlocuind expresia lui a în (6.28), se obține

$$W = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m_e} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\cdot\frac{m_e^2 Z^2 e^4}{16\pi^2\hbar^2\varepsilon_0^2} = -\frac{m_e Z^2 e^4}{32\pi^2\hbar^2\varepsilon_0^2}.$$

Luînd $\hbar = h/2\pi$, găsim

$$W = -\frac{m_e Z^2 e^4}{8h^2\varepsilon_0^2},$$

care este identică cu expresia (6.10) pentru energia stării staționare din teoria lui Bohr, pentru cazul cînd numărul cuantic principal $n = 1$ și $Z = 1$.

Să aplicăm acum atomului de hidrogen noțiunea de probabilitate, exprimată prin relația $dP = |\Psi|^2\, dV$. Se observă că probabilitatea pentru ca electronul să se găsească în pătura sferică avînd razele r și $r + dr$, este proporțională cu $|\Psi|^2\, 4\pi r^2\, dr$, deoarece $dV = 4\pi r^2\, dr$.

Presupunînd că pentru un atom de hidrogen se cunoaște forma lui $|\Psi|^2$, densitatea de probabilitate $P_r = dP/dr$ pentru ca electronul să se afle la distanța r de nucleu este

$$P_r = |\Psi|^2 r^2.$$

Modul în care variază P_r cu distanța r, pentru cazurile în care numărul cuantic principal $n = 1, 2$ și 3 este arătat în figura 6.26.

Imaginea mecanicii ondulatorii, privind atomul de hidrogen, extinsă și la atomii mai complicați, este diferită

de teoria modelului cuantic a lui Bohr sau Sommerfeld. În noua mecanică cuantică se consideră că electronul are o anumită probabilitate pentru ca să se afle la o anumită distanță față de nucleu, poziția exactă fiind necunoscută, ca urmare a acțiunii principiului de incertitudine [3].

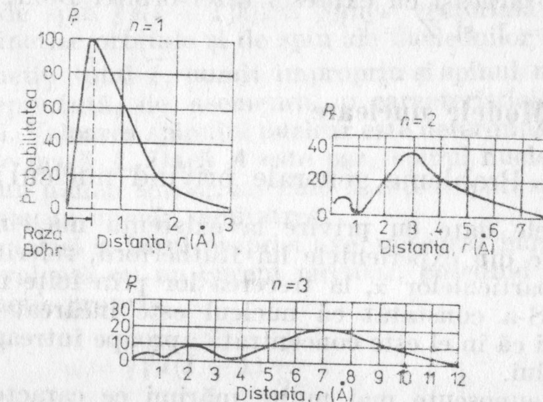


Fig. 6.26.

Intr-adevăr, așa cum rezultă din graficele din figura 6.24, este mică atît probabilitatea ca electronul să se afle la o distanță foarte mică, cît și probabilitatea de a se afla la o distanță mai mare decît raza primei orbite Bohr. Poziția cea mai probabilă de existență a electronului este aceea unde P_r este maximă. Pentru $n = 1$ și considerînd pentru atomul de hidrogen o simetrie sferică, se poate lua Ψ de forma : $\Psi = \exp(-ra)$. Se obține

$$P_r = \text{const}\ |\Psi|^2 r^2 = \text{const}\ r^2 \exp(-2ra).$$

Valoarea maximă a lui P_r se obține cînd $r = r_1$, unde

$$\frac{d}{dr}\left[r^2 \exp(-2ra)\right] = 0,$$

de unde

$$-2a \exp(-2r_1 a) r_1^2 + 2r_1 \exp(-2r_1 a) = 0$$

și deci $r_1 = 1/a$.

---

[3] **Postulînd limita aplicării noțiunilor din mecanica clasică la studiul particulelor elementare, principiul de incertitudine al lui Heisenberg afirmă că este imposibil să cunoaștem cu precizie nelimitată și simultan, atît coordonatele cît și viteza microparticulei.**

Înlocuind pe a cu expresia dată de (6.29), găsim

$$r_1 = \frac{4\pi h^2 \varepsilon_0}{m_e Z e^2} = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e Z e^2},$$

care este aceeași cu expresia razei orbitei Bohr, pentru cazul $n = 1$ și $Z = 1$.

6.2. Modele nucleare

6.2.1. Probleme generale privind nucleul atomic

Primele date cu privire la existența nucleului sînt cunoscute din experiențele lui Rutherford, referitoare la difuzia particulelor α, la trecerea lor prin foițe metalice subțiri. S-a constatat că nucleul este încărcat electric pozitiv și că în el este concentrată aproape întreaga masă a atomului.

Sînt cunoscute mai multe mărimi ce caracterizează nucleul atomic. Prima dintre caracteristici este sarcina nucleului, egală cu produsul dintre numărul atomic Z și sarcina elementară e, ceea ce reprezintă un multiplu întreg al sarcinii protonului.

A doua caracteristică este masa nucleului, egală cu diferența dintre masa atomului și masa electronilor săi. Conform ipotezei lui Ivanenko și Heisenberg, confirmată ulterior prin numeroase experiențe, nucleul este format din A particule, numite nucleoni, dintre care Z sînt protoni, și $N = A - Z$ neutroni. Masa nucleelor se măsoară în unități atomice de masă reprezentînd 1/12 din masa izotopului C_6^{12}. Masa nucleului, rotunjită la un întreg, poartă numele de număr de masă și este egal cu numărul de particule A din nucleu.

Dimensiunea, respectiv volumul este o altă mărime caracteristică fiecărui nucleu. Dacă A este numărul nucleonilor din nucleu, admițind în primă aproximație că nucleul are formă sferică, variate experiențe conduc astăzi la valoarea razei nucleului

$$R = R_0 A^{1/3},$$

unde $R_0 = (1{,}2 \div 1{,}3) \cdot 10^{-15}$ m, care arată că volumul nucleului variază liniar cu numărul de masă. Calculul densității nucleare a arătat că aceasta este de ordinul a

10^{17} kg/m^3, fiind aceeași pentru toate nucleele. Este o valoare extrem de mare a densității, dacă ne gîndim că densitatea medie a Pămîntului este de 5500 kg/m^3.

Ca și electronul, particulele ce compun nucleul au fiecare un moment cinetic orbital $\sqrt{l(l+1)}\,h/2\pi$ și un moment cinetic de spin $\sqrt{s(s+1)}h/2\pi$. Suma vectorială a momentelor cinetice orbitale și de spin ale nucleonilor dă momentul cinetic total $\vec{I}$, numit impropriu și spinul nuclear, care reprezintă, de asemenea, o caracteristică a fiecărui nucleu. Valoarea spinului nuclear este determinată de numărul de masă A. Dacă A este par, spinul nuclear este zero sau un număr întreg, iar cînd A este impar, spinul nuclear este un număr semiîntreg.

Datorită rotației în jurul propriei axe, mișcarea nucleului este echivalentă cu un curent circular, posedînd un moment magnetic propriu

$$\mu = \gamma\sqrt{I(I+1)}\frac{h}{2\pi},$$

unde I este numărul cuantic de spin, iar γ se numește factor giromagnetic.

În sfîrșit, datorită distribuției nesimetrice a protonilor în nucleu, acesta posedă un moment electric cvadripolar, care apare atunci cînd în locul distribuției sferice a sarcinilor electrice, acestea se distribuie aproximativ sub forma unui elipsoid.

După ce a devenit cunoscută structura nucleului și anume că în nucleu coexistă intr-un volum extrem de mic atît neutroni, cît și protoni, s-a pus problema de ce aceștia nu se resping între ei, ceea ce ar duce în final la instabilitatea nucleelor.

Faptul însă că majoritatea nucleelor sînt stabile arată că în afară de forțele de interacțiune electrostatică, între nucleonii din nucleu trebuie să se manifeste și un alt tip de forțe, de intensitate mult mai mare, care să anihileze interacțiunea electrostatică.

Acest lucru a devenit evident chiar în experiențele de difuzie a particulelor α, care au arătat că acestea, atunci cînd au o energie suficient de mare și se apropie la o distanță de ordinul a 10^{-15} m de nucleu, particulele α nu mai sînt respinse de nucleu, ci atrase de acesta, deși atît sarcina nucleului cît și cea a particulelor α au același semn.

Reprezentînd pe un grafic variaţia energiei potenţiale a sistemului nucleu-particulă proiectil, cînd aceasta se apropie de nucleu, în funcţie de distanţă, se obţine graficul din figura 6.27. Se observă că atunci cînd energia cinetică a particulei proiectil, chiar dacă este un proton sau o particulă α, nu este prea mare, la apropierea de nucleu,

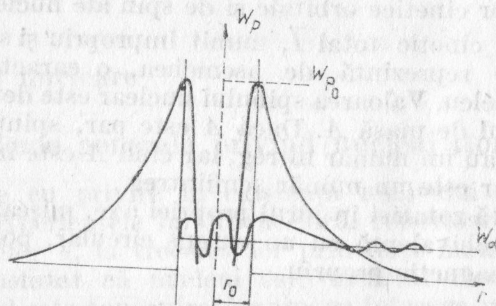


Fig. 6.27.

particula respectivă este respinsă de acesta. Energia potenţială a sistemului nucleu-particulă, la o distanţă suficient de mare, fiind

$$W_p = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon r},$$

se obţine $W_p r = \text{const}$ şi deci alura curbei de variaţie a energiei potenţiale va fi de forma unei hiperbole echilatere, asimptotă la axa ordonatelor W_p şi la axa absciselor r.

În cazul cînd energia cinetică a particulei este suficient de mare, pentru a se putea apropia de nucleu la distanţa $r < r_0$, curba de variaţie a energiei potenţiale suferă o cădere bruscă, ceea ce arată că în acest caz, locul forţei de respingere electrostatică este luat de un nou tip de forţă, numită forţa de atracţie nucleară. Se observă că pentru ca o particulă proiectil încărcată pozitiv să intre sau să iasă din nucleu, ar trebui să posede o energie cinetică cel puţin egală cu valoarea W_{p_0}, maximul barierei de potenţial, adică maximul energiei potenţiale a curbei ce desparte cele două domenii, nucleul şi exteriorul său.

Experienţa a arătat însă că este posibil ca o particulă proiectil, de exemplu o particulă α, să poată pătrunde în nucleu, chiar dacă are o energie cinetică mai mică decît înălţimea barierei de potenţial W_{p_0}. Acest lucru a fost

explicat de G. Gomow, pe baza mecanicii ondulatorii. Datorită proprietăţilor sale ondulatorii, particula α se poate infiltra prin bariera de potenţial care are înălţimea $W_{p_0} > W_\alpha$, fenomenul purtînd numele de efect tunel.

Revenind la noţiunea de forţă de atracţie nucleară, menţionăm că aceasta se defineşte ca forţa ce se exercită între nucleonii din nucleu. Deşi natura exactă a acestor forţe nu este pe deplin lămurită, se cunosc o serie de proprietăţi ale acestora. Ele sînt forţe mari pe distanţe foarte scurte, în sensul că se manifestă pînă la distanţe de 10^{-15} m, după care devin practic nule [4]. Aceste forţe sînt independente de sarcină, ceea ce înseamnă că ele acţionează între nucleoni, indiferent dacă sînt sau nu încărcaţi, intensitatea acestor forţe fiind independentă de sarcina nucleonilor. Proprietatea de saturare a acestor forţe arată că un nucleon interacţionează cu un număr limitat de nucleoni vecini, întocmai cum o moleculă de apă, de exemplu, interacţionează numai cu moleculele din sfera de acţiune moleculară. De asemenea, aceste forţe depinzînd atît de vectorul de poziţie, cît şi de orientarea spinilor nucleonilor, forţele nucleare sînt în acelaşi timp şi forţe spinoriale.

Deşi au fost emise diferite teorii care încearcă să explice natura acestor forţe nucleare, nici una nu reuşeşte să explice toate faptele experimentale observate. Astfel teoria lui Heisenberg, postulînd faptul că forţele nucleare sînt forţe de schimb, consideră că atît protonul cît şi neutronul sînt două stări cuantice ale aceleiaşi particule — nucleonul. Conform acestei teorii, în nucleele β-nestabile, interacţiunea dintre nucleoni are un caracter corpuscular şi schimbă între ei pozitroni, electroni şi neutroni, nucleonii trecînd dintr-o stare cuantică în alta, conform schemei,

$$p \rightleftarrows n + e^0_{+1} + \nu, \quad n \rightleftarrows p + e^0_{-1} + \tilde{\nu},$$

unde ν şi $\tilde{\nu}$ sînt particula neutrin, respectiv antineutrin. Calculele efectuate folosind aceste teorii dau valori de 10^{10} ori mai mici pentru forţa de interacţiune decît forţele nucleare reale.

Reconsiderînd problema particulei de schimb, Yukawa consideră că aceasta este mezonul π, astfel încît trecerea protonului în neutron şi invers se face prin schimbul virtual de mezoni, schimb care se face în mod continuu. Aceasta ar însemna ca un nucleon să emită un mezon şi tot

[4] Distanţa 10^{-15} m $= 1$ f se numeşte femtometru.

el să-l absoarbă din nou. Există însă serioase îndoieli cu privire la existența unui asemenea joc. Teorii mai noi afirmă că mezonii pot exista sub forma unor cîmpuri mezonice, în care probabilitatea de transformare a nucleonului dintr-o formă în alta este suficient de mare. În orice caz, proprietățile forțelor nucleare arată că structura nucleului trebuie concepută în strînsă legătură cu modul de aranjare al nucleonilor în nucleu.

Făcînd o comparație între cunoștințele privind atomul cu cele ce privesc nucleul, acestea din urmă sînt mult mai reduse, din mai multe motive. În timp ce între electroni și nucleu acționează forțe electromagnetice, fiind pusă la punct o teorie care explică suficient de bine faptele experimentale, datorită necunoașterii cu suficientă precizie a naturii forțelor nucleare, nu a putut fi construită pînă acum o teorie a nucleului, în acord cu toate datele experimentale. În același timp, pentru nucleele conținînd un număr mare de nucleoni este imposibil de construit funcția de undă ψ, întrucît aceasta depinde de un număr mare de variabile. Problema este echivalentă cu a spune că este foarte dificil, dacă nu chiar imposibil, de calculat ecuațiile care descriu mișcările nucleonilor din nucleu. De asemenea, deoarece unele nuclee conțin un număr prea mic, iar altele un număr foarte mare de nucleoni, face imposibilă o teorie unitară, de exemplu statistică, pentru a putea fi studiate toate gradele de libertate ale nucleonilor.

Pentru reducerea acestor dificultăți și din necesitatea de a concepe o structură și o dinamică internă a nucleului, au fost imaginate o serie de modele nucleare, fiecare caracterizînd anumite proprietăți ale nucleului, nici unul nefiind capabil însă să interpreteze toate faptele experimentale privitoare la nucleu. În general modelele nucleare s-au dezvoltat în trei direcții : una, considerînd un cuplaj puternic între părțile constitutive ale nucleului, o a doua direcție, în care se consideră că nucleonii sînt particule independente și deci interacțiunea dintre ei este slabă, iar a treia direcție, mixtă, le cuprinde pe primele două. În cele ce urmează vom discuta pe scurt unele dintre aceste modele.

6.2.2. Modelul picătură

Modelul picătură, imaginat de Gamow și propus de N. Bohr, are la bază analogia dintre nucleu și o picătură de

lichid incompresibil. Din această analogie se desprind o serie de trăsături comune :

1. Atît densitatea picăturii cît și a nucleului sînt mărimi constante, independente de dimensiunea picăturii, respectiv a nucleului.
2. Fenomenului de evaporare a picăturii de lichid (pierderea de molecule) îi corespunde fenomenul de radioactivitate ale unor nuclee, iar agitației termice a moleculelor dintr-o picătură de lichid îi corespunde energia cinetică a nucleonilor din nucleu.
3. Căldurii latente de vaporizare a lichidului ce formează picătura îi corespunde energia de legătură pe nucleon, fiind o caracteristică a nucleului.
4. Atît moleculele din picătura de lichid cît și nucleonii din nucleu au proprietatea de a interacționa numai cu moleculele, respectiv cu nucleonii cei mai apropiați (proprietatea de saturație).
5. O altă proprietate comună se referă la faptul că atît picătura cît și nucleul prezintă fenomenul de tensiune superficială, în sensul că asupra unei molecule aflată pe suprafața picăturii sau a unui nucleon aflat la marginea nucleului, acționează forțe de atracție din interior.

În afară de aceste asemănări, între o picătură de lichid și un nucleu există și deosebiri esențiale. De exemplu, în timp ce între moleculele unei picături aflate în stare neutră se manifestă numai forțe de atracție, între nucleonii dintr-un nucleu există și forțe de respingere electrostatică, ceea ce reduce stabilitatea nucleelor.

Importanța principală a acestui model constă în aceea că el a permis scrierea unei relații semiempirice, cu ajutorul căreia se poate calcula energia de legătură a nucleului. În fond ce reprezintă această energie? Calculînd cu multă precizie masa nucleului și masa particulelor ce compun nucleul respectiv, se constată că la scara microcosmosului, „întregul nu este egal cu suma părților". Mai precis, suma maselor de repaus ale particulelor ce compun nucleul este mai mare decît masa nucleului respectiv,

$$Zm_p + (A - Z)m_n > m,$$

unde m_p și m_n sînt masa protonului, respectiv a neutronului, iar m este masa nucleului.

Diferența

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m \qquad (6.30)$$

se numește defect de masă. Acest fenomen apare întotdeauna cînd protonii și neutronii în repaus se unesc pentru a forma nucleul. Pe de altă parte, se cunoaște din teoria relativității restrînse că energia de repaus a unui corp este $W = m_0c^2$, astfel încît

$$[Zm_p + (A - Z)m_n]c^2 - mc^2 = \Delta W \quad (6.31)$$

reprezintă micșorarea energiei de repaus a nucleonilor la unirea lor pentru a constitui un nucleu. În mod asemănător, la desfacerea nucleului în părțile sale componente, nucleul trebuie să primească o energie egală cu ΔW. Din acest motiv ΔW a primit numele de energie de legătură.

Întrucît valoarea energiei de legătură ΔW este foarte mare, de ordinul zecilor și chiar sutelor de MeV(1MeV = $= 10^6$ eV)[5], mult mai mare decît energia de legătură a electronilor de nucleu, această energie se poate neglija (este de ordinul cîtorva keV ; 1 keV $= 10^3$eV) și relația (6.30) se înlocuiește cu

$$\Delta W = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n]\, c^2 - Mc^2,$$

unde M este masa atomului, care include și masa tuturor electronilor atomului.

Din relația (6.31) se constată că valoarea energiei de legătură a nucleului depinde de masa acestuia. Se definește energia de legătură pe nucleon, ca energia de legătură totală împărțită la numărul total de nucleoni, $\Delta W/A$.

Valoarea energiei pe nucleon variază de la un atom la altul, în figura 6.28 redîndu-se modul în care variază $\Delta W/A$ în funcție de A. Se constată, de asemenea, că energia pe nucleon variază mult pentru nucleele avînd $1 \leqslant A < 20$, pentru nuclee avînd $20 \leqslant A < 60$ această energie crește ușor de la 8 MeV la 8,5 MeV, iar pentru $A \geqslant 60$ energia scade înapoi la 7,5 MeV. Energia de legătură pe nucleon este o măsură a stabilității nucleelor, în sensul că nucleele mai stabile au $\Delta W/A$ mai mare. Din figura 6.28 se observă că nucleele avînd $20 \leqslant A < 60$ sînt mai stabile decît nucleele ușoare și nucleele grele. Celelalte nuclee fiind mai instabile, au energia de legătură mai mică, ceea ce

[5] Electron-voltul (eV) este energia pe care o capătă electronul sau o altă particulă avînd sarcina egală cu a electronului, atunci cînd traversează distanța dintre două puncte, între care este o diferență de potențial egală cu un volt ; 1 eV $= 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Jouli.

permis folosirea lor, cele ușoare la sinteza nucleară, iar cele mai grele la fisiunea nucleară.

Să vedem acum care sînt termenii ce compun relația semiempirică, cu ajutorul căreia se poate calcula energia de legătură a nucleului.

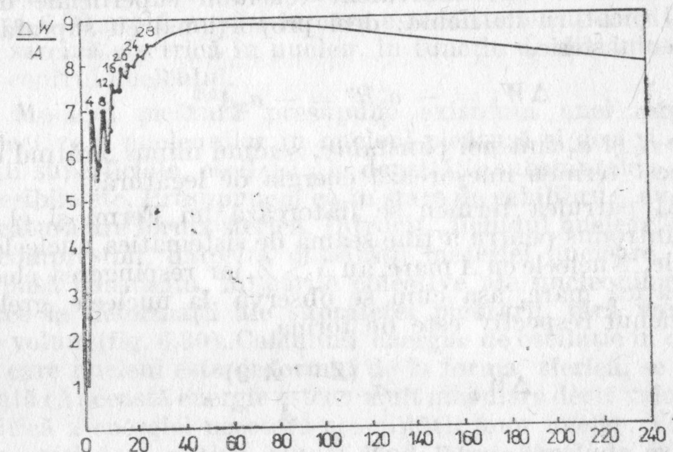


Fig. 6.28.

Deoarece atît densitatea nucleară cît și energia de legătură pe nucleon sînt mărimi constante, cea mai importantă contribuție la energia de legătură a nucleului se datorează energiei de interacțiune (atracție) care este proporțională cu numărul de nucleoni A,

$$\Delta W_1 = a_1 A,$$

unde a_1 este o constantă.

Efectul forței de atracție dintre nucleoni este diminuat de către forțele de respingere coulombiană dintre cei Z protoni. Din acest motiv, al doilea termen în energia de legătură depinde de energia potențială dintre protonii din nucleu, energie proporțională cu Z^2e^2/R. Deoarece $R = R_0A^{1/3}$, cel de al doilea termen este

$$\Delta W_2 = -\, a_2 Z^2 A^{-1/3},$$

unde a_2 este a doua constantă, semnul minus arătînd că acest termen micșorează energia de legătură.

Pentru scrierea celui de al treilea termen ce contribuie la energia de legătură, vom ține seama direct de una din

asemănările dintre nucleu şi o picătură de lichid şi anume de proprietatea de saturaţie. Cînd a fost scris primul termen ΔW_1, am considerat că toţi nucleonii sînt atraşi în mod egal în toate direcţiile, lucru care nu este adevărat pentru nucleonii aflaţi la suprafaţa nucleului. Aşadar, acest termen este echivalent tensiunii superficiale din cazul picăturii de lichid, deci proporţional cu suprafaţa nucleului sferic,

$$\Delta W_3 = -a_3' R^2 = -a_3 A^{2/3},$$

unde a_3' şi a_3 sînt noi constante, semnul minus arătînd că şi acest termen micşorează energia de legătură.

Al patrulea termen se datorează lui Fermi şi el a fost introdus pentru a ţine seama de sistematica nucleelor stabile. Nucleele cu A mare, au $N > Z$, iar respingerea electrostatică mare, aşa cum se observă la nucleele grele. Termenul respectiv este de forma

$$\Delta W_4 = -a_4 \frac{(Z - A/2)^2}{A},$$

care se anulează cînd $Z = N = A/2$, şi creşte, cînd excesul de neutroni faţă de protoni creşte şi el.

În sfîrşit, al cincilea termen ţine seama de faptul că nucleele par-pare (Z şi N sînt numere pare) sînt cele mai stabile, nucleele impar-impare sînt cele mai instabile, în timp ce nucleele par-impare sau impar-pare au o stabilitate cuprinsă aproximativ între primele două tipuri. Este vorba de fapt de o corecţie δ, de valoare foarte mică, unde $\delta = 0$ pentru nucleele cu A impar (par-impare sau impar-pare), $\delta = +a_5 \cdot A^{-3/4}$, pentru Z par, A par sau $\delta = -a_5 A^{-3/4}$ pentru Z impar, N impar, A par, unde a_5 este o nouă constantă.

Introducînd într-o singură relaţie toţi termenii, se obţine

$$\Delta W = a_1 A - a_2 Z^2 A^{-1/3} - a_3 A^{2/3} a_4 \frac{(Z - A/2)^2}{A} \pm \delta, \tag{6.32}$$

numită formula semiempirică a lui Weizsäcker, ce dă energia de legătură în MeV. Împărţind prin A relaţia de mai sus, se obţine $\Delta W/A$, adică energia pe nucleon, care este în bună concordanţă cu curba din figura 6.28.

Datorită proprietăţii de saturaţie a forţelor nucleare, distribuţia protonilor şi neutronilor în interiorul nucleului trebuie să fie aproximativ aceeaşi. Aceasta înseamnă că şi distribuţia sarcinii electrice în interiorul nucleului trebuie să fie astfel încît ea să scadă o dată cu diminuarea densităţii de sarcină în stratul superficial. Curba din figura 6.29 arată modul în care este distribuită densitatea de sarcină electrică în nucleu, în funcţie de distanţa faţă de centrul nucleului.

Modelul picătură presupune existenţa unei mişcări colective a nucleonilor în nucleul-picătură şi deci şi oscilaţii superficiale, oscilaţii ale densităţii substanţelor compresibile etc. Presupunem că în stare de echilibru, nucleul picătură are forma sferică. Întrucît „lichidul nuclear" este incompresibil, datorită densităţii materiei nucleare, presupusă constantă, mişcările colective ale nucleonilor vor duce la deformaţii ale suprafeţei picăturii, fără variaţii de volum (fig. 6.30). Calculînd energia de oscilaţie în cazul în care nucleul este deformat de la forma sferică, se constată că această energie este cu mult mai mare decît valoarea critică a energiei necesară stabilităţii unor nuclee. Valoarea critică se obţine atunci cînd parametrul de fisiune

$$\frac{Z^2}{A} > 45.$$

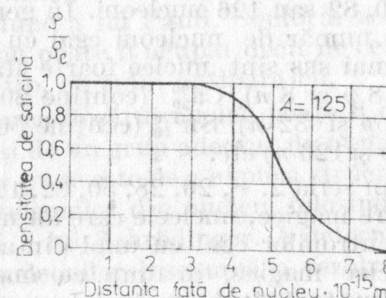
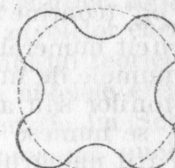


Fig. 6.29.


Fig. 6.30.

La această valoare fisiunea spontană s-ar produce practic instantaneu dacă nu intervin şi alţi factori, care pot conduce la nuclee stabile cu Z mult mai mare. Pentru U_{92}^{235} parametrul de fisiune este $Z^2/A \simeq 36$, astfel încît pentru acest nucleu este totuşi posibilă fisiunea spontană, dar

cu timpul de înjumătățire foarte mare, deci cu probabilitate mică dar nenulă.

Așadar, cu ajutorul modelului picătură poate fi explicat procesul de fisiune, expulzarea nucleonilor din nucleu și stabilitatea nucleelor. Cu toate că acest model este simplu și intuitiv, el nu poate da decît o descriere parțială a comportării nucleelor, a căror structură este mult mai complexă, față de orice imagine clasică. Neputîndu-se explica decît unele fenomene nucleare, altele, cum ar fi momentele magnetice, stările excitate, nivelele energetice ale nucleelor etc. neprimind o explicație satisfăcătoare, a făcut necesar dezvoltarea altor modele de nucleu, care să înlăture dificultățile de mai sus.

6.2.3. Modelul în pături

Formula semiempirică a lui Weizsäcker descrie cu suficientă aproximație modul în care variază energia de legătură pe nucleon, în funcție de A și Z. Studiul graficului din figura 6.28 arată totuși că această variație nu este monotonă, apărînd o serie de maxime și minime pentru anumite valori ale lui Z. Se constată că nucleele care au energia de legătură minimă, conțin un număr de nucleoni de același tip (protoni sau neutroni), egal cu unul dintre numerele 2, 8, 20, 28, 50, 82 sau 126 nucleoni. În general, nucleele care conțin un număr de nucleoni egal cu unul din numerele seriei de mai sus sînt nuclee foarte stabile, cum sînt : O_8^{16} (conține 8 p și 8 n), Ca_{20}^{40} (conține 20 p și 20 n), Ni_{28}^{60} (conține 28 p și 32 n), Sn_{50}^{120} (conține 50 p și 70 n), Pb_{82}^{208} (conține 82 p și 126 n) etc.

Întrucît numerele din seria 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 au primit numele de numere magice, nucleele care au numărul protonilor sau al neutronilor egal cu unul din aceste numere se numesc nuclee magice, în timp ce nucleele care au atît numărul de protoni cît și numărul de neutroni numere magice, se numesc dublu magice. Atît nucleele magice, dar mai ales cele dublu magice, pe lîngă stabilitate deosebită au și o răspîndire foarte mare în natură, fiind formate dintr-un număr relativ mare de izotopi. Așa, de exemplu, calciul are 6 izotopi stabili, staniul este format din 10 izotopi stabili, iar plumbul nu întîmplător este produsul final al tuturor seriilor radioactive naturale.

În același timp, se cunoaște că atomii care au în păturile electronice un număr de electroni egal cu 2, 10, 18, 36, 54 sau 86 sînt atomi deosebit de stabili, formînd grupa gazelor rare. Prin analogie cu păturile electronice ale atomului, s-a admis ipoteza că o asemenea configurație o pot avea și nucleonii în nucleul atomic. Ideea de bază a unui astfel de model, numit modelul în pături, constă în aceea că nucleonii ce formează nucleul se aranjează pe anumite pături, lucru care explică, ca și la atomi, existența unei periodicități în proprietățile nucleelor.

Faptul că nucleonii sînt aranjați în pături nucleare conduce, de asemenea, la ipoteza existenței și în nucleu a unor nivele de energie, asemănătoare nivelelor energetice ale electronilor din atom. Acest lucru înseamnă de fapt că între nucleoni există o slabă interacțiune, cu alte cuvinte nucleonii se pot deplasa în nucleu ca niște particule independente.

Se presupune, ca și la atomi, că nivelele de joasă energie sînt complete în starea fundamentală, fiind posibile, în cazul nucleelor nestabile, numai acele interacțiuni care duc la trecerea unuia sau a mai multor nucleoni, pe nivele neocupate. Ocupînd nivele energetice distincte, distribuția nucleonilor în nucleu este guvernată de principiul de exclusiune a lui Pauli. Conform acestui principiu, fiecare nivel nu poate fi ocupat decît de cel mult 2 nucleoni de același tip, cu spini antiparaleli.

Starea fiecărui nucleu poate fi descrisă de o funcție de undă și de un grup adecvat de numere cuantice. Problema care se pune este de a explica structura nivelelor energetice ale nucleonilor din nucleu, folosind limbajul teoriei ondulatorii a lui Schrödinger. A determina nivelele energetice ale nucleonilor înseamnă a rezolva ecuația lui Schrödinger pentru sistemul de nucleoni ce formează nucleul, în condițiile necunoașterii exacte a formei energiei potențiale de interacțiune dintre nucleoni. Pentru simplitate, Elsasser a presupus încă în 1934 că fiecare nucleon se mișcă independent în cîmpul mediu al celorlalți $A - 1$ nucleoni, într-o groapă de potențial dreptunghiulară. Lucrînd în coordonate sferice, se poate alege ca funcția de undă Ψ să depindă numai de raza r, astfel încît din ecuația generală

(6.23) a lui Schrödinger să folosim numai ecuaţia (6.24), în care $\Psi = \Psi(r)$,

$$\frac{d^2\Psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Psi(r)}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2}[W - W_p]\Psi(r) = 0,$$

unde m este masa unui nucleon.

Pentru a rezolva această ecuaţie, trebuie să-l cunoaştem pe $W_p(r)$. Luăm $W_p(r)$ sub forma cea mai simplă, dată de un oscilator armonic liniar,

$$W_p(r) = \frac{1}{2} k r^2 + \text{const},$$

căreia îi corespunde un potenţial de formă parabolică.

Soluţiile pentru ecuaţia de undă a lui Schrödinger, în situaţia cînd energia potenţială se ia sub forma de mai sus, conduc pentru valorile proprii ale energiei, la expresii de forma

$$W_n = h\nu\left(n + \frac{3}{2}\right),$$

unde n este numărul cuantic principal.

Folosind forma de mai sus a potenţialului, se ajunge la concluzia că completarea păturilor s-ar face cu nucleoni al căror număr pe aceste pături este în ordine 2, 8, 20, 40, 70, 112. După cum se vede, se găsesc în acest fel doar primele trei numere magice, ceea ce arată că modelul prezentat este bun doar pentru nucleele uşoare. În acelaşi fel au fost construite soluţii valabile numai pentru nucleele grele.

O soluţie oarecum intermediară a fost propusă de Mayer şi Jensen, care consideră că cele două tipuri de nucleoni (protoni şi neutroni) formează două sisteme de particule independente, deci păturile neutronice şi protonice se completează independet. Aceasta înseamnă că fiecare nucleon de un anumit tip (proton sau neutron) se consideră că se mişcă într-un cîmp mediu, format prin suprapunerea a două cîmpuri, corespunzătoare celor două tipuri de nucleoni. S-a calculat şi în această ipoteză forma potenţialului, dar, pentru a obţine toate numerele magice în ordinea lor, a trebuit să se presupună existenţa unui cuplaj spin-orbită foarte puternic între nucleoni, determinînd o despicare a nivelelor nucleare, adică apariţia unei „structuri fine nucleare".

Deşi modelul în pături descrie destul de bine nucleele uşoare, explică izomeria nucleară[6], tranziţiile nucleare radiative, paritatea nucleelor etc., el nu poate explica fenomenul de fisiune, comportarea nucleelor puternic excitate etc., ceea ce arată că nici acest model nu este complet.

6.2.4. Alte modele nucleare

Atît modelul picătură cît şi modelul în pături pot explica fiecare numai o parte din fenomenele legate de nucleu. Încercînd, de exemplu, să se calculeze valoarea momentului magnetic nuclear sau a momentului electric cvadripolar al nucleului pentru elementele mai grele, cu ajutorul modelului în pături, s-au găsit abateri relativ mari faţă de determinările experimentale. În plus, măsurătorile arată că momentul electric cvadripolar este zero pentru nucleele ce au numărul de nucleoni egal cu un număr magic, este pozitiv la nucleele care au $Z = Z_{\text{magic}} - 1$ şi negativ la care $Z = Z_{\text{magic}} + 1$.

Explicarea a fost dată în 1952 de către A. Bohr şi B. Mottelson care au propus modelul generalizat (unificat) de nucleu, model în care se îmbină aspectele pozitive ale celor două modele de nucleu, discutate mai sus. S-a plecat de la semnificaţia fizică a momentului electric cvadripolar şi anume că acesta este o măsură a abaterii nucleului de la simetria sferică.

Modelul generalizat concepe nucleul ca format dintr-un miez ce conţine toţi nucleonii de pe păturile complete, în timp ce nucleonii păturilor exterioare incomplete se mişcă evasiindependent în cîmpul mediu al miezului, care poate să se modifice foarte lent. În acest fel, miezul nucleului este asimilat unei picături deformabile de lichid nuclear incompresibil, iar nucleonii exteriori, care produc deformarea nucleului, sînt trataţi în conformitate cu modelul în pături. Se consideră că nucleonii ce formează miezul nucleului au o mişcare colectivă, miezul mişcîndu-se ca un întreg, iar nucleonii exteriori au o mişcare independentă.

[6] Se numesc nuclee izomere acele nuclee care, conţinînd un număr egal de protoni şi neutroni, diferă printr-o serie de proprietăţi fizice, cum sînt: timpul de înjumătăţire, energia de legătură, momentul cinetic de spin etc.

Cele mai stabile nuclee sînt de formă sferică, avînd păturile nucleonice complete. Pe măsură ce se adaugă noi nucleoni, aceştia se dispun pe o pătură deschisă, dînd naştere la suprafaţa nucleului la fluctuaţii ale potenţialului cîmpului creat de nucleu. Aceste fluctuaţii determină apariţia unei presiuni pe care nucleonii adăugaţi o exercită asupra miezului, ceea ce conduce la deformarea nucleului şi deci la instabilitatea lui. Deformarea nucleului creşte şi devine maximă, pînă cînd, pe pătura exterioară incompletă, sînt aproximativ 2/3 din totalul nucleonilor ce pot încăpea pe ea şi devine zero, cînd pătura este completă.

Neajunsul principal al modelului generalizat o constituie incapacitatea sa de a explica variaţia secţiunii eficace [7] de captură a neutronilor de către nucleu, la variaţia energiei neutronului incident. Datele experimentale arată că secţiunea eficace de captură prezintă o serie de maxime pentru anumite energii, ca şi cînd nucleul s-ar comporta ca un mediu optic, care ar avea valori diferite ale indicelui de refracţie pentru raze cu diferite lungimi de undă.

Problema a fost rezolvată prin propunerea modelului optic al nucleului, în care interacţiunea neutronilor cu nucleul este înlocuită printr-o energie potenţială de interacţiune. Această energie se ia sub formă complexă, $W_p = W_{p_0} + iW_{p_1}$, partea sa reală descriind reflexia şi refracţia nucleonilor, iar partea imaginară amortizarea undelor, datorită absorbţiei. Modelul descrie destul de bine rezultatele obţinute la difuzia neutronilor pe elemente relativ uşoare.

În încercarea de a explica alte fapte experimentale, au mai fost propuse şi alte modele de nucleu, cum ar fi modelul de gaz-Fermi, modelul alfa-particulă, modelul suprafluid, în total aproximativ 12 modele de nucleu. În încheiere, menţionăm că nici unul dintre modelele propuse nu tratează în întregime structura nucleului, o teorie unitară a nucleului nefiind realizată pînă azi, aceasta urmînd să fie rezolvată în viitor.

[7] Secţiunea eficace este mărimea fizică egală cu probabilitatea ca un eveniment intranuclear să aibă loc. Are dimensiunile unei arii şi se măsoară în barni ($1b = 10^{-28}$ m^2). Secţiunea eficace de captură neutronică este secţiunea eficace a procesului de captură a neutronului de către nucleu.

Capitolul 7. MODELAREA ÎN STUDIEREA CORPULUI SOLID

„Legile fizice trebuie să aibă frumuseţe matematică".

DIRAC

7.1. Starea cristalină şi starea amorfă

Succesul modelului cinetic al gazului, în care acesta este considerat ca un ansamblu de particule, aflate într-o stare de mişcare dezordonată, şi rezultatele bune, obţinute prin extinderea modelului, cu unele ipoteze suplimentare, la studierea gazului real, au încurajat extinderea modelului la studierea fazelor lichidă şi solidă.

Cunoaştem că în stare naturală, substanţa se poate găsi într-una dintre cele patru stări de agregare : solidă, lichidă, gazoasă sau plasmă. Existenţa unei faze sau alta depinde de temperatură, de presiunea exterioară şi de alţi factori. În timp ce gazele umplu întreg volumul vasului în care se află şi sînt foarte compresibile, lichidele şi solidele au volume definite şi în comparaţie cu gazele sînt practic incompresibile. La rîndul ei, deşi la prima vedere se poate trata ca un gaz, plasma reprezintă totuşi o stare deosebită a materiei, formată din electroni, ioni, atomi, neutroni şi fotoni, aflaţi într-o necontenită mişcare haotică. Există şi alte limite care determină luarea unor precauţii suplimentare, atunci cînd se încearcă extinderea modelului cinetic la solide.

De exemplu, în timp ce o moleculă de gaz se poate ciocni cu oricare altă moleculă din volumul de gaz considerat, o moleculă a corpului solid nu se poate ciocni decît cu moleculele din imediata vecinătate, atunci cînd temperatura solidului creşte.

Fiecărui corp solid aflat în natură îi corespunde o anumită temperatură şi o anumită presiune de formare. În momentul îndeplinirii acestor condiţii, structura internă a solidului se modifică pînă cînd sistemul atinge o

stare de echilibru termodinamic, moment în care energia sa liberă devine minimă.

Energia liberă F este o funcţie termodinamică ca şi energia internă U, entalpia S sau entalpia H a sistemului termodinamic, toate fiind funcţii de variabile independente, care pot defini integral starea unui sistem termodinamic.

Din expresia matematică a principiului întii al termodinamicii,

$$dQ = dU + dW,$$

şi a principiului al doilea al termodinamicii,

$$dS \geqslant \frac{dQ}{T},$$

unde semnul = se referă la transformările reversibile, iar semnul > se referă la transformările ireversibile, rezultă

$$dS \geqslant \frac{dU + dW}{T}. \tag{7.1}$$

Pentru sistemele termodinamice naturale, adică sistemele neizolate, la care volumul V = const şi care sînt în contact cu un termostat, un rol important îl joacă energia liberă,

$$F = U - TS.$$

Dacă ţinem seama de relaţia (7.1), rezultă

$$dF = dU - TdS - SdT \leqslant dW - S\,dT.$$

Cum în cazul sistemelor neizolate V = const, T = = const, rezultă

$$dF \leqslant 0,$$

ceea ce înseamnă de fapt că la solide, la care variaţia volumului cu presiunea este mică, înseamnă că starea de echilibru se atinge atunci cînd energia liberă atinge valoarea minimă. Experienţa arată că starea stabilă de echilibru se caracterizează printr-un minim absolut al energiei libere şi ea corespunde aşa-numitei stări cristaline a solidului. Întrucît starea stabilă se obţine cînd $\delta F = 0$, adică $\delta(U - TS) = 0$, stările de echilibru la $T > 0$ implică în mod obligatoriu prezenţa defectelor ($S \neq 0$) (v. § 7.4).

În afară de starea stabilă, în timpul schimbării structurii sale, un solid poate trece printr-o succesiune de stări

metastabile, care corespund unor minime relative ale energiei libere, în care timp, solidul respectiv se află în stare amorfă. O primă clasificare a solidelor ar fi deci : starea amorfă şi starea cristalină, în funcţie de valoarea minimului energiei libere a stării respective.

Solidele amorfe se caracterizează prin izotropia proprietăţilor fizice, inexistenţa unor temperaturi constante de topire şi existenţa unei aşa-numite ordini locale, care constă în dispunerea ordonată a atomilor în jurul unui atom dat pînă la distanţe de ordinul a cîtorva diametre moleculare.

Solidele cristaline se caracterizează prin anizotropia proprietăţilor fizice, temperatură constantă de topire şi existenţa unei ordini la distanţă, aceasta fiind o repetare a ordinii locale în toată masa solidului.

7.2. Forţe de legătură

Experienţa arată că atomii care formează solidul sînt strîns legaţi unul de altul, fără însă a exista tendinţa de apropiere sau de respingere între ei. Este vorba aşadar de o coeziune între atomii solidului, datorată forţelor de legătură dintre aceşti constituenţi forţe ce asigură stabilitatea mecanică şi termodinamică a sistemului de solid considerat.

Din acest motiv, un model de solid trebuie să ia în considerare cel puţin două tipuri de forţe : forţe de atracţie dintre atomii aflaţi la distanţe mari faţă de dimensiunile atomului şi forţe de respingere, cînd distanţa dintre atomi este mică. În funcţie de natura acestor forţe, se poate face o clasificare a cristalelor. Alte tipuri de cristale care mai există se datorează distribuţiei diferite a electronilor şi nucleelor în cristale.

Forţele de atracţie dintre atomi sînt de natură electrostatică şi o clasificare a diferitelor tipuri de legături este strict dependentă de structura electronică a atomilor respectivi. S-au convenit, din acest punct de vedere, patru tipuri de legături, deşi nu se poate trasa o graniţă strictă între acestea : legătură ionică, legătură covalentă, legătură moleculară şi legătură metalică sau legătura covalentă nesaturată.

Forţa de atracţie dintre atomi se datorează electronilor din stratul periferic şi în momentul în care forţa de atracţie dintre doi atomi este egală cu forţa de respingere, atunci

sistemul format din cei doi atomi va fi într-o situație cînd energia sa potențială este minimă și deci sistemul se află într-o stare de echilibru stabil. Distanța dintre atomi la care se realizează acest echilibru poartă numele de distanță de echilibru și este de ordinul constantei rețelei cristaline, $r_0 \simeq 10^{-10}$ m.

Presupunem doi atomi aflați în stare fundamentală, la o distanță între ei care poate fi considerată infinită în raport cu dimensiunile atomilor, moment în care energia lor potențială este nulă. Aducînd atomii în apropiere unul de altul, energia potențială a fiecărui atom va fi dată de

$$V = \begin{pmatrix}\text{descreșterea energiei}\\ \text{potențiale datorată}\\ \text{atracției}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{creșterea energiei}\\ \text{potențiale datorată}\\ \text{respingerii}\end{pmatrix}$$

și în cazul unui tip simplu de potențial interatomic, acest lucru se scrie

$$V = -\frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^m}, \qquad (7.2)$$

unde A, B, n și m sînt constante pozitive.

Întrucît forța rezultantă de interacțiune derivă dintr-un potențial, expresia sa este de forma

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r},$$

astfel încît

$$F = -\frac{nA}{r^{n+1}} + \frac{mB}{r^{m+1}}. \qquad (7.3)$$

Ecuațiile (7.2) și (7.3) sînt reprezentate grafic în figura 7.1. La echilibru, forța totală este zero, adică

$$\frac{nA}{r_0^{n+1}} = \frac{mB}{r_0^{m+1}} \Rightarrow r_0 = \left(\frac{mB}{nA}\right)^{\frac{1}{m-n}},$$

r_0 fiind distanța de echilibru dintre atomi.

Valoarea minimă a energiei V_0 este chiar energia de legătură a sistemului și este egală cu căldura de disociere a moleculei. De notat că la metale atît legătura covalentă cît și cea metalică se stabilesc pe

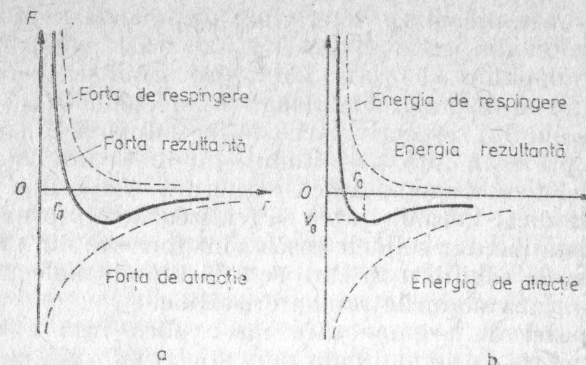


Fig. 7.1.

seama electronilor de valență. Deosebirea constă în aceea că în timp ce legătura covalentă se formează numai între perechi de atomi care-și pun în comun electronii de valență, electronii respectivi deplasîndu-se numai între cei doi atomi, la legătura metalică are loc o delocalizare a electronilor, în sensul că toți atomii cristalului își pun în comun electronii de valență.

Un cîmp electric sau termic extern poate influența mult mișcarea electronilor de valență, ceea ce conferă metalului proprietatea de a fi bun conductor electric și termic.

Fiecare metal avînd o energie de legătură diferită, punctele de topire sînt caracteristice fiecăruia : mai mici la metalele alcaline și mai ridicate la metalele de tranziție. Metalelor le sînt atribuite, de asemenea, proprietăți optice, magnetice, galvanomagnetice etc. caracteristice.

7.3. Structura cristalină ideală a corpului solid

Una dintre condițiile formării stării solide este existența unei interacțiuni puternice între molecule (atomi sau ioni), astfel încît mișcarea termică a moleculelor nu joacă un rol atît de important ca în cazul lichidelor și în special al gazelor. Ca urmare, moleculele corpului solid se dispun una față de alta în poziții foarte precise, executînd doar mici oscilații termice în jurul pozițiilor lor de echilibru. Această dispunere determină condițiile de echilibru. Evident, dacă aceste condiții sînt îndeplinite într-o

zonă a substanței și au determinat dispunerea reciprocă a moleculelor din zona respectivă, aceleași condiții trebuiesc îndeplinite și în alte zone, prin urmare, trebuie să determine o dispunere analoagă a moleculelor în orice zonă a solidului respectiv. Aceasta înseamnă că la trecerea dintr-o parte în alta a solidului, modul de amplasare al moleculelor se repetă, adică structura corpurilor solide este periodică. Periodicitatea se realizează sub forma rețelelor cristaline, iar solidele însele sînt formate din cristale. Punctele de echilibru în care se află atomi, molecule sau ioni formează nodurile rețelei cristaline.

O astfel de argumentare nu explică însă existența stării amorfe la solide, cum sînt sticla, substanțele plastice și altele care nu au o structură periodică. Aceste substanțe nu se află în stare de echilibru, însă cu trecerea timpului ele își schimbă structura, apropiindu-se de starea cristalină. Sticla, de exemplu, cristalizează după cîteva sute de ani. Procesul de cristalizare poate fi accelerat considerabil prin încălzire, cînd sticla se înmoaie.

Istoric vorbind, studiul structurii cristaline a început aproximativ în jurul anului 1700, prin studierea de către metalurgi a formei externe sau morfologice a cristalelor.

După cum se va vedea în continuare, studiul aprofundat al structurii cristalelor s-a făcut cu ajutorul radiațiilor X, primul care a descoperit metoda fiind fizicianul german Max von Laue, în 1912, și dezvoltată de fizicienii englezi W. H. Bragg și W. L. Bragg. Experiența a arătat că orice cristal constă din atomi, molecule sau ioni, aranjați într-un model tridimensional, care se repetă regulat.

Cea mai mare parte a solidelor cristaline sînt formate prin aglomerarea unui număr mare de grăunți cristalini microscopici, orientați la întîmplare. Astfel de grăunți pot fi observați cu ajutorul unui microscop, dacă suprafața respectivă de metal, de exemplu cupru, se șlefuiește bine și apoi se corodează cu un acid. O asemenea aglomerare formează un policristal, starea policristalină fiind caracteristică tuturor metalelor care se obțin prin răcirea rapidă a topiturii.

Există totuși și situații în care unele substanțe naturale sînt formate din monocristale, care se recunosc după fețele plane pe care le prezintă. Întrucît asemenea monocristale naturale prezintă o serie de defecte, de exemplu incluziuni de atomi străini în cantități necunoscute și cu o distribuție

neuniformă, au fost imaginate cristale ideale, a căror periodicitate este respectată riguros după trei direcții necoplanare. Cu ajutorul cristalelor ideale, au putut fi studiate toate tipurile de cristale, atît cele existente în natură, cît și cele crescute artificial.

La baza descrierii structurii oricărui cristal se află o unitate de structură, numită celulă unitară sau elementară. Celula elementară este acea regiune din substanță, cu ajutorul căreia, prin translație pe cele trei direcții necoplanare, se poate construi rețeaua cristalină. Rezultă deci că rețeaua spațială a unui monocristal este de fapt un sistem de celule elementare paralele, tangente între ele și care ocupă întreg volumul monocristalului. Altfel spus, rețeaua spațială reprezintă un aranjament periodic regulat al unei mulțimi infinite de puncte discrete din spațiu, care se întind la infinit, prin translații repetate, după trei direcții necoplanare.

Rețeaua spațială este în fond o abstracție matematică, dar, plasînd în fiecare nod al rețelei un atom, moleculă sau ion, înseamnă că rețelei respective i s-a atribuit o bază, obținîndu-se structura cristalină (fig. 7.2.) Deci :

$$\text{rețea} + \text{bază} = \text{structură cristalină}.$$

Dacă luăm ca origine a coordonatelor un nod oarecare al rețelei, atunci raza vectoare a oricărui alt nod se poate pune sub forma

$$\vec{r} = n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}, \tag{7.4}$$

unde n_1, n_2, n_3 sînt numere întregi (inclusiv zero). Vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ se numesc vectori fundamentali sau vectori de translație, iar valorile lor absolute coincid cu constantele rețelei pe direcțiile respective.

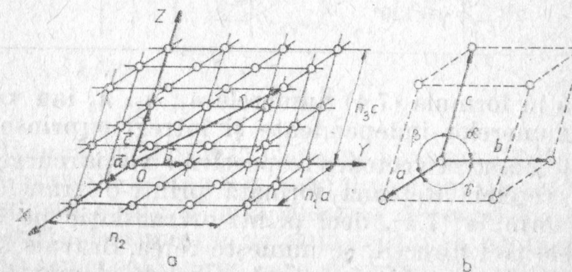


Fig. 7.2.

Avînd în vedere că vectorii fundamentali nu sînt în general ortogonali, în afară de aceştia, pentru descrierea celulei elementare se folosesc şi unghiurile α, β, γ dintre vectorii respectivi. În funcţie de valorile vectorilor fundamentali şi de unghiurile dintre ei, există şapte clase de sisteme cristalografice (singonii), sistematizate în tabelul 7.1.

Tabelul 7.1

Sistemul cristalografic	Parametrii reţelei	Număr celule din sistem	Simbol celulă	Exemple
Triclinic	$a\neq b\neq c$ $\alpha\neq\beta\neq\gamma$	1	P	$CuSO_4\cdot 5H_2O$
Monoclinic	$a\neq b\neq c$ $\alpha=\gamma=90°\neq\beta$	2	P C	$CaSO_4\ 2H_2O$
Ortorombic	$a\neq b\neq c$ $\alpha=\beta=\gamma=90$	4	P C I F	KNO_3
Tetragonal	$a=b\neq c$ $\alpha=\beta=\gamma=90°y$	2	P I	Sn, TiO_3
Cubic	$a=b=c$ $\alpha=\beta=\gamma=90°$	3	P I F	Au, NaCl
Trigonal (romboedric)	$a=b=c$ $\alpha=\beta=\gamma\neq 90°$ şi $< 120°$	1	P	SiO_2, $CaCO_3$
Hexagonal	$a=b\neq c$ $\alpha=\beta=90°$, $\gamma=120°$	1	P	Zn, grafit

Dacă în formula (7.4) numerele n_1, n_2, n_3 iau valorile tuturor numerelor independente şi întregi cuprinse între $-\infty$ şi $+\infty$, raza vectoare respectivă $\vec{r}$ va parcurge toate nodurile reţelei. Reţeaua formată printr-o transformare dată de formula (7.4), deci printr-o translaţie pe oricare dintre cele trei direcţii, se numeşte reţea Bravais simplă. Acestui tip de reţea îi corespunde o celulă elementară primitivă, care are nodurile de reţea numai în colţuri. Luînd

în consideraţie atomii ce revin unei celule, atunci celula ce aparţine reţelei Bravais simplă conţine doar un singur atom (moleculă sau ion). Acest lucru reiese din faptul că întrucît fiecare atom aflat în nodul celulei este de fapt comun la opt celule vecine, atomul contribuind cu o optime la celula considerată şi deci celula conţine $8 \times 1/8$ atom $= 1$ atom. În total există patru tipuri de celule elementare: celule primitive (P) descrise mai sus, celule cu volum centrat (I) cu noduri de reţea şi în centrul fiecărei celule elementare, celule cu feţe centrate (F) cu noduri de reţea şi în centrul fiecărei feţe şi celule cu baze centrate (C) cu noduri de reţea şi în mijlocul celor două baze.

Pe baza consideraţiilor de simetrie, Bravais a arătat că există în total 14 tipuri de reţele spaţiale, care formează cele şapte sisteme cristalografice arătate mai sus (fig. 7.3).

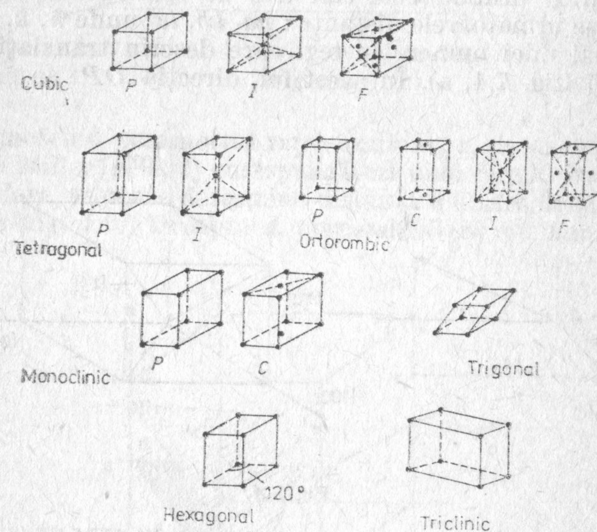


Fig. 7.3.

Repartizarea cristalelor în clase, pe baza aranjării periodice tridimensionale a atomilor, este doar unul dintre criteriile de clasificare şi are la bază simetria de translaţie. În afară de acest tip de simetrie, reţeaua cristalină poate avea şi o simetrie punctuală, prin care păstrînd fix un punct din reţea, prin diferite operaţii de simetrie (rotaţie, reflexie şi combinaţii ale acestora), reţeaua coincide cu ea însăşi.

Conform teoriei grupurilor, cu ajutorul căreia se studiază simetria punctuală, rezultă că toate cristalele pot fi împărțite în 32 clase cristaline, din care două aparțin sistemului triclinic, trei sistemului monoclinic, trei sistemului ortorombic, șapte sistemului tetragonal, cinci sistemului cubic, cinci sistemului trigonal și șapte sistemului hexagonal.

În încheiere, să vedem cum se pot scrie analitic elementele geometrice ale unui cristal, folosind așa-numita notație cristalografică. De fapt este vorba de o notație folosită pentru indicarea direcțiilor principale din cristal și a planelor cristaline.

Mai întîi, despre notația folosită la indicarea principalelor direcții dintr-un cristal. Fie, de exemplu, dreapta OP o direcție dintr-un cristal și fie a, b, c mărimile vectorilor fundamentali. Pentru a ajunge din originea O în punctul P urmînd cele trei axe de coordonate, trebuie parcurse următoarele distanțe: ha, kb, lc unde h, k, l sînt cele mai mici numere întregi care descriu translația respectivă (fig. 7.4, a). În acest fel, direcția OP se notează

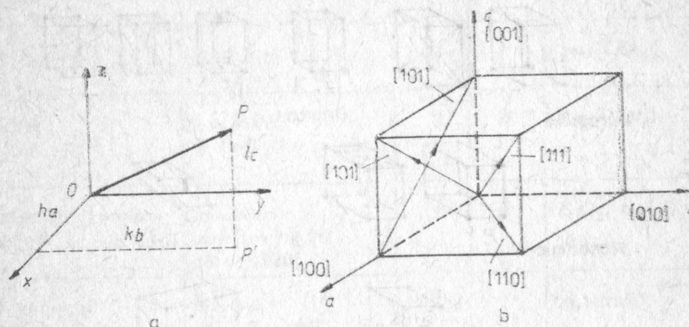


Fig. 7.4.

prescurtat (h, k, l), aceștia numindu-se indicii Miller pentru direcția dată. Indicii h, k, l au valori pozitive, cînd deplasările se fac în sensul pozitiv al axelor de coordonate, și valori negative, cu sensul indicat deasupra, cînd deplasarea se face în sensurile negative ale axelor. În figura 7.4, b sînt indicate cîteva direcții principale dintr-un cristal.

Un plan cristalin este definit de un set de minimum trei puncte necoliniare din cristal. Pentru definirea unui asemenea plan se folosesc, de asemenea, indicii Miller $[h, k, l)$, care se calculează în modul următor. Fie, de exemplu, planul ABC care intersectează axele de coordonate, atașate celulei elementare, la distanțele $x = 3a$, $y = 2b$ și $z = 2c$ (fig. 7.5). Aducînd la același numitor valorile inverse ale numerelor 3, 2 și 2, se obține: $\frac{2}{6}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{3}{6}$, iar indicii Miller căutați vor fi [2, 3, 3]. Cînd planul taie una dintre axe la infinit, indicile Miller corespunzător este zero.

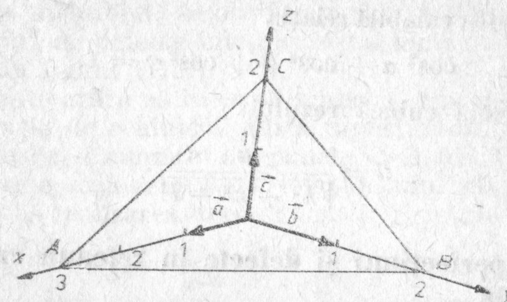


Fig. 7.5.

Cunoscînd parametrul rețelei cubice, a, de exemplu, și indicii Miller $[h, k, l]$ corespunzători unei familii de plane reticulare, se poate determina distanța d dintre două plane vecine (fig. 7.6.) Dreapta d, perpendiculară pe familia de

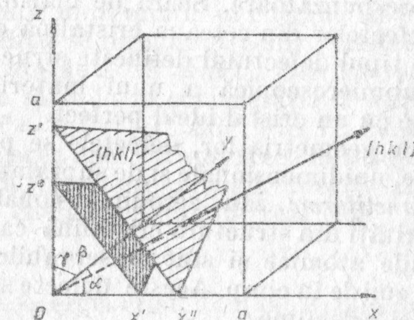


Fig. 7.6.

plane considerată, are și ea indicii Miller (h, k, l). Cosinusurile unghiurilor α, β și γ, formate de dreapta d cu axele

de coordonate sînt date de relaţiile

$$\cos\alpha = \frac{d}{x'} = \frac{d}{\frac{a}{h}} = h\cdot\frac{d}{a}, \quad \cos\beta = \frac{d}{y'} = k\frac{d}{a},$$

$$\cos\gamma = \frac{d}{z'} = l\frac{d}{a}$$

şi întrucît este valabilă relaţia

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

pentru reţeaua cubică rezultă

$$d = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}. \tag{7.5}$$

7.4. Imperfecţiuni şi defecte în reţeaua cristalină reală

Structura cristalină discutată mai sus, la care fiecărui nod al reţelei îi aparţine aceeaşi bază, corespunde unui cristal ideal care reprezintă doar un model teoretic pentru studierea corpului solid. În realitate, în procesul de formare al cristalelor, ca urmare a condiţiilor de solidificare, reţeaua cristalină va fi perturbată în organizarea ei, consecinţa fiind apariţia unor imperfecţiunii şi defecte în cristalele corespunzătoare. Scara de mărime a imperfecţiunilor şi defectelor din reţeaua cristalină este diferită şi în funcţie de tipul defectului defineşte structura microscopică sau submicroscopică a unui material cristalin real, în opoziţie cu un cristal ideal perfect.

În funcţie de geometria lor, defectele se pot clasifica în : punctiforme, unidimensionale şi de suprafaţă.

Defectele punctiforme sau zerodimensionale se referă la acele iregularităţi din structura cristalină care nu depăşesc dimensiunile atomice şi sînt observabile numai cu microscopul cu emisie în cîmp. Aceste defecte se manifestă la nivelul reţelei cristaline.

Fiecare atom dintr-un solid are o energie de vibraţie şi, la temperaturi mai mari de zero absolut, vor exista întotdeauna un număr finit de atomi care să aibă energii suficiente pentru a depăşi bariera de potenţial produsă de atomii vecini şi să se deplaseze din poziţia de echilibru.

În funcţie de locul ocupat de atomul (molecula sau ionul) ce a părăsit nodul respectiv, pot exista două situaţii, corespunzîndu-le două defecte diferite. Cînd atomul ce părăseşte nodul reţelei cristaline ajunge într-o poziţie aflată între noduri (interstiţiu), se creează un loc liber, numit vacanţă, şi un atom interstiţial. Perechea vacanţă-atom interstiţial formează un defect Frenkel. Dacă atomul respectiv capătă o energie suficientă pentru a ajunge la suprafaţa metalului, se obţine un defect Schottky. Cele două tipuri de defecte într-un cristal ionic au fost reprezentate în figura 7.7.

Se poate arăta că în cazul ambelor tipuri de defecte, concentraţia de echilibru, adică raportul dintre numărul de vacanţe n şi numărul de puncte de reţea N ale cristalului, creşte exponenţial cu temperatura. Să reamintim mai întîi că realizarea unei structuri cristaline ideale sta-

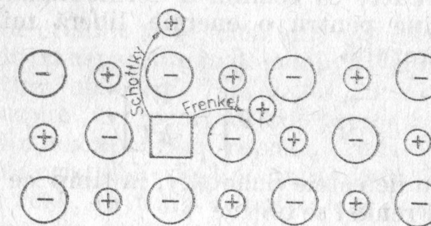


Fig. 7.7.

bile corespunde unui minim al energiei libere $F = U - TS$. Aceeaşi condiţie se impune şi pentru cristalele reale.

La zero absolut, $\Delta F \equiv \Delta U$, însă la temperaturi mai mari trebuie să se ia în consideraţie şi variaţia entropiei şi deci $\Delta F = \Delta U - T\ \Delta S$. Fie W_v energia necesară pentru realizarea unei vacanţe, ceea ce înseamnă că pentru producerea a n vacanţe, energia internă creşte cu $\Delta U = nW_v$, iar energia cristalului real este

$$U = U_0 + nW_v,$$

unde U_0 este energia cristalului ideal, fără defecte. În mod corespunzător creşte şi entropia S şi energia liberă F a cristalului real. Entropia cristalului real va fi

$$S = S_0 + nS_v,$$

unde S_0 este entropia cristalului ideal, iar S_v variaţia entropiei la realizarea unei vacanţe.

Avînd în vedere că numărul total de configurații posibile în care pot fi așezate cele n vacanțe în rețeaua cristalină este

$$w = \frac{N!}{n!(N-n)!},$$

ținînd seama de formula lui Stirling pentru numere mari, $\ln N! = N \cdot \ln N - N$ și de relația lui Boltzman,

$$S_v = k \ln w,$$

rezultă pentru energia liberă relația

$$F = U - TS = F_0 + nW_v - kT \ln \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

Avînd în vedere că echilibrul termodinamic al sistemului se obține pentru o energie liberă minimă, din $(\partial F/\partial n)_T = 0$ rezultă

$$\frac{n}{N} = \exp\left[-\frac{W'}{kT}\right],$$

valabilă pentru defectele Schottky, în timp ce pentru defectele de tip Frenkel se obține

$$\frac{n}{N} = \exp\left[-\frac{W''}{2kT}\right],$$

unde W' și W'' sînt energiile necesare pentru realizarea unei vacanțe în cazul defectului Schottky, respectiv Frenkel.

Defecte punctiforme (de rețea) produc și prezența impurităților într-un cristal. Deși cele mai rafinate metode de preparare garantează o puritate absolută a materialelor, cele mai pure materiale conțin 10^{-9} procente de impurități, ceea ce corespunde la o concentrație de aproximativ 10^{17} atomi de impuritate la un metru cub de material. Pentru a ilustra acest grad de puritate, se dă ca exemplu situația în care 10 tone de grîu ar conține un bob de secară. Aceste impurități modifică proprietățile mecanice, termice, electrice, optice etc. ale cristalului respectiv.

Un metal avînd multe defecte punctiforme va prezenta o duritate mai mare, datorită faptului că distorsionările locale ale rețelei împiedică alunecarea planelor cristaline.

Vacanțele și atomii interstițiali au influență asupra coeficientului de dilatare termică a metalelor la călire, acesta prezentînd anomalii la dispariția vacanțelor de neechilibru.

S-a constatat experimental că, la metale, vacanțele și atomii în poziția interstițială sînt obstacole în calea deplasării electronilor sub influența unui cîmp electric aplicat. Din acest motiv, prin creșterea acestor defecte, rezistivitatea electrică a metalelor crește și ea și deci conductivitatea electrică scade. Alta este situația la conductorii ionici, de exemplu, la cristalele halogenurilor alcaline și de argint. S-a constatat că prin adăugarea de ioni bivalenți de Ca, Sr, Ba, Cd conductivitatea electrică (ionică) crește, datorită producerii de noi vacanțe de către ionii respectivi, motiv pentru care măsurarea conductivității electrice este una dintre metodele de investigare a defectelor de rețea.

O serie de cristale pure, cum sînt cele ale halogenurilor alcaline, sînt transparente în domeniul vizibil al spectrului, la temperatura obișnuită. Încălzind un astfel de cristal pînă la o anumită temperatură, în prezența vaporilor metalului alcalin, iar apoi răcit repede, cristalul se colorează. De exemplu, cristalele de KCl încălzite în vapori de potasiu devin roșii, în timp ce cristalele de NaCl încălzite în vapori de sodiu devin galbene. Aceleași defecte se obțin și prin introducerea unor impurități chimice în cristal sau prin bombardarea cu radiații X, radiații gamma sau cu neutroni.

Deoarece cristalele respective capătă o anumită culoare sub influența factorilor enunțați, înseamnă că o parte din radiațiile din spectrul vizibil sînt absorbite, fenomenul în sine fiind un defect punctiform, numit centru de culoare. Cel mai simplu este centrul de culoare F (de la cuvîntul german Farbe = culoare), de care este responsabil cristalul și nu vaporii metalului alcalin folosit pentru producerea centrului de culoare.

Defectele optice sînt produse și de unele impurități chimice, cum sînt, de exemplu, impuritățile de Cr în monocristalul de Al_2O_3, determinînd colorația în roșu a rubinului.

Defectele unidimensionale se mai numesc și dislocații și apar fie prin inserția unui plan de atomi între planele ordonate ale cristalului (fig. 7.8, a), fie prin deplasarea unor plane cristalografice sub acțiunea unor eforturi tan-

gențiale (fig. 7.8, b). Dislocația propriu-zisă este linia dintre zona perturbată și cea neperturbată a cristalului.

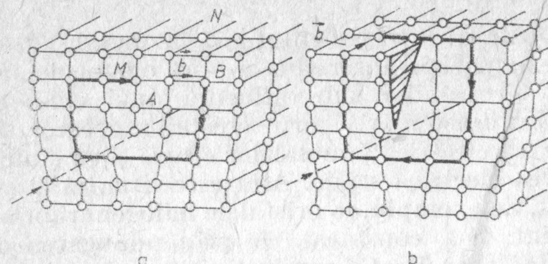


Fig. 7.8.

Corespunzător celor două moduri de obținere a dislocațiilor unidimensionale, acestea pot fi : marginale sau elicoidale. Dislocațiile pot fi descrise de bucla care înconjoară linia de dislocație.

Fie, de exemplu, un plan de inserție MN, introdus între două plane reticulare vecine (fig. 7,8, a). Se observă că, în acest caz, plecînd din nodul M și parcurgînd pe direcțiile OX și OY în sens direct și în sens invers, același număr de noduri, se obține bucla sau circuitul Burgers. În cazul existenței dislocației, bucla nu se închide iar vectorul $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ se numește vectorul Burgers. Vectorul Burgers este perpendicular pe bucla de dislocație în cazul dislocației marginale (fig. 7.8, a) și este paralel cu ea în cazul dislocației elicoidale (fig. 7,8 b).

Liniile de dislocație, în cazul în care nu formează bucle închise, au capetele ieșite la suprafața cristalului, putînd fi puse în evidență prin metoda corodării chimice. În acest sens epruveta de metal se șlefuiește foarte bine, după care se atacă cu un reactiv chimic adecvat. Privită la microscop, se observă în porțiunile în care apar capetele liniilor de dislocație, gropi de corodare, care pot fi apoi numărate, cunoscînd astfel numărul de dislocații din unitatea de suprafață.

Dislocațiile nefiind sisteme stabile, este necesară consumarea unui lucru mecanic pentru crearea lor. Din acest motiv, un metal care prezintă dislocații este ușor de deformat plastic și, din contră, lipsa dislocațiilor mărește limita de rezistență și proprietățile elastice. Dislocațiile joacă deci un rol important în explicarea proprietăților

mecanice ale solidelor, permițînd, de exemplu, înțelegerea mecanismului deformărilor plastice și, de aici, necesitatea elaborării de tehnologii pentru obținerea materialelor cu parametrii doriți.

Defectele de suprafață sau bidimensionale sînt defecte structurale, care apar la suprafața de separare a două părți cu structuri diferite dintr-un cristal, între două cristale sau între faze diferite. Aceste defecte apar și la trecerea de la un agregat cristalin (grăunte, cristalită) la altul, cu orientări cristaline diferite. Defectele pot apărea sub forma unui strat de tranziție, în care atomii ocupă poziții intermediere între pozițiile atomilor celor două cristale vecine sau sub forma unui strat amorf, care nu are orientare cristalografică. În general, prin laminare la rece, într-un metal se formează un număr mare de grăunți ; prin recoacere la temperatură adecvată are loc o grupare ordonată a dislocațiilor, conducînd la o îmbunătățire a calității materialului respectiv.

7.5. Starea electronilor liberi în solide

După ce s-au imagnat diferite tipuri de cristale din care sînt făcute majoritatea solidelor, deci și metalele, s-a încercat găsirea unor astfel de modele legate de structura cristalină, care să explice proprietățile fizice ale corpului solid. Primele modele aparțin fizicii clasice, bazîndu-se pe rezultatele mecanicii și termodinamicii. Cu aceste modele au putut fi explicate un număr mic de proprietăți ale solidului. Folosirea unor modele care se beazează pe concepțiile fizicii cuantice a permis explicarea în plus a unor proprietăți legate de structura internă a solidelor.

7.5.1 Modelul electronilor liberi

În acest paragraf și în următorul, vom înțelege prin solid o stare cristalizată a substanței formată din nuclee, care ocupă nodurile rețelelor cristaline, și din electroni, care se mișcă liber prin solid. Avînd în vedere că cea mai mare parte a electronilor unui atom sînt puternic legați de nucleu, rezultă că se pot mișca liber, de fapt, numai electronii de valență ai atomilor ce compun solidul respectiv, electronii formînd așa-numitul gaz electronic.

Interpretarea proprietăţilor fizice cu ajutorul modelului electronilor liberi a fost dezvoltată mai întîi clasic, pe baza lucrărilor lui Drude şi apoi ale lui Lorentz.

În concepţia clasică, gazul electronic are următoarele proprietăţi : este un gaz perfect, căruia i se poate aplica distribuţia după viteze a lui Maxwell; electrnonii se mişcă haotic în lipsa unui cîmp electric extern; sînt luate în considerare numai interacţiunile dintre electroni şi ioni, întrucît interacţiunile reciproce dintre electroni sînt neglijabile.

La vremea sa, teoriile lui Drude şi, respectiv, Lorentz au fost de un real folos la determinarea aproximativă a conductivităţii termice şi a conductivităţii electrice la temperatura camerei. Imposibilitatea însă de a explica valorile conductivităţii termice, respectiv conductivităţii electrice în apropierea temperaturii de zero absolut şi chiar a valorilor exacte ale conductivităţii termice la temperatura camerei precum şi a unor fenomene ca paramagnetismul metalelor, căldura masică electronică etc., a determinat aplicarea aparatului matematic al mecanicii cuantice pentru descrierea comportării electronilor liberi din metale.

Modelul cuantic al electronilor liberi a fost dezvoltat de Sommerfeld. Conform acestui model, energia potenţială a electronilor are o valoare constantă şi negativă în interiorul metalului şi nulă în exteriorul său. Vom considera deci metalul ca o groapă de potenţial — pentru simplificare, unidimensională — de lăţime L, adîncime $V = -V_0$ şi conţinînd N electroni (fig. 7.9).

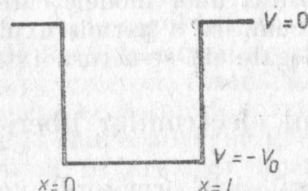


Fig. 7.9.

Se pune problema găsirii stărilor permise pentru un electron aflat în groapa de potenţial. Aceste stări pot fi găsite luînd în considerare faptul că cei N electroni nu sînt complet independenţi unul faţă de altul, tocmai datorită acţiunii principiului de exclusiune al lui Pauli, conform căruia, fiecare stare poate fi ocupată de cel mult doi electroni, avînd spinii opuşi.

Stările cuantice permise ale unui electron aflat în groapa de potenţial se află rezolvînd ecuaţia lui Schrodinger, cu condiţiile la limită adecvate,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + (W-V)\psi = 0 \qquad (7.6)$$

Condiţiile la limită sînt : $\psi = 0$, pentru $x = 0$ şi pentru $x = L$ (condiţiile sînt aceleaşi şi pentru direcţiile y şi z).

În acest fel, electronul poate fi considerat ca o undă, caracterizată de funcţia de undă $\psi(x, y, z)$ şi de numărul de undă $K = 2\pi/\lambda$, unde λ este lungimea de undă. În continuare, vom scrie ecuaţia lui Schrodinger explicitînd energia cinetică,

$$W_c = W - V = W - (-V_0) = W + V_0, \qquad (7.7)$$

în funcţie de numărul de undă. În acest scop, conform formulei lui de Broglie, vom avea

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h/2\pi}{\lambda/2\pi} = \hbar K, \qquad (7.8)$$

iar energia cinetică

$$W_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2K^2}{2m} \qquad (7.9)$$

şi deci

$$W + V_0 = \frac{\hbar^2K^2}{2m}, \qquad (7.10)$$

iar ecuaţia lui Schrodinger se scrie

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \frac{\hbar^2K^2}{2m}\psi = 0.$$

Funcţia de undă ce satisface această ecuaţie este de forma

$$\psi = \psi_0\, e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}}$$

sau, pentru cazul unidimensional,

$$\psi = \psi_0\, e^{iKx} = \psi_0 (\cos Kx + i \sin Kx).$$

Introducînd acum condiţiile la limită, rezultă că pentru $x = 0$, avem $\psi(0) = 0$, iar din $x = L$ rezultă $\psi(L) = 2\psi_0 \sin kL = 0$ şi deci $KL = l\pi$, de unde

$$K = \frac{l\pi}{L},$$

l fiind un număr întreg şi pozitiv ($l = 1, 2, 3, \ldots$). Nu putem avea $l = 0$, deoarece dacă peste tot $\psi = 0$, înseamnă de fapt că electronul nu există.

În acelaşi timp, energia cinetică se scrie

$$W_c = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot l^2.$$

Avînd în vedere condiţia de normare

$$\int_0^L \psi\psi^* \, dx = 1,$$

unde $\psi = \psi_0 \sin \frac{l\pi x}{L}$, rezultă

$$\psi_0^2 \int_0^L \sin^2 \frac{l\pi x}{L} \, dx = 1,$$

de unde

$$\psi = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin \frac{l\pi x}{L}.$$

Dacă se rezolvă ecuaţia lui Schrödinger în cazul unei cutii tridimensionale cubice, cu latura L, se obţine soluţia

$$\psi = \psi_0 \, e^{i\vec{K}\vec{r}} = \left(\frac{2}{V}\right)^{1/2} \cdot \sin \frac{l\pi x}{L} \cdot \sin \frac{m\pi x}{L} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}, \tag{7.11}$$

unde V este volumul cubului.

Notînd

$$K_x = \frac{l\pi x}{L}; \; K_y = \frac{m\pi x}{L}; \; K_z = \frac{n\pi x}{L},$$

rezultă

$$K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (l^2 + m^2 + n^2),$$

iar pentru energie se obţine

$$W_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (l^2 + m^2 + n^2). \tag{7.12}$$

Se observă că datorită simetriei cubice a cutiei, există degenerescenţă, energia nemaifiind definită de numerele cuantice n, l, m, ci doar de

$$p^2 = n^2 + l^2 + m^2,$$

unde (l, m, n) reprezintă un grup de numere cuantice, la care, dacă se adaugă numărul cuantic de spin m_s, se obţine grupul de numere cuantice (n, l, m_l, m_s) ce caracterizează starea electronului aflat pe un nivel energetic.

Energia corespunzătoare saltului electronului între două nivele succesive fiind dată de relaţia

$$W_{p+1}[(p+1)^2] - W_p(p^2) = \frac{\hbar^2}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^2,$$

rezultă că pentru un cristal avînd volumul de 10^{-6} m^3, această energie este de aproximativ 10^{-15} eV, considerînd două nivele de la fundul gropii de potenţial.

Informaţii despre numărul de stări sau energia W pentru un număr de undă K dat, se pot obţine astfel. Considerăm spaţiul tridimensional $\vec{K}$ în care coordonatele axelor sînt K_x, K_y şi K_z (fig. 7.10, *a*). Un punct din acest spaţiu poate fi reprezentat, conform relaţiei (7.8), prin componentele momentului impulsului divizate prin termenul $\hbar$.

Să calculăm numărul de stări care au vectorul de undă cuprins între valorile $\vec{K}$ şi $\vec{K} + d\vec{K}$. În spaţiul coordonatelor respective, starea cea mai de jos poate fi reprezentată prin figura geometrică spaţială ce are dimensiunile

$$K_x = 1\frac{\pi}{L}, \quad K_y = 1\frac{\pi}{L}, \quad K_z = 1\frac{\pi}{L},$$

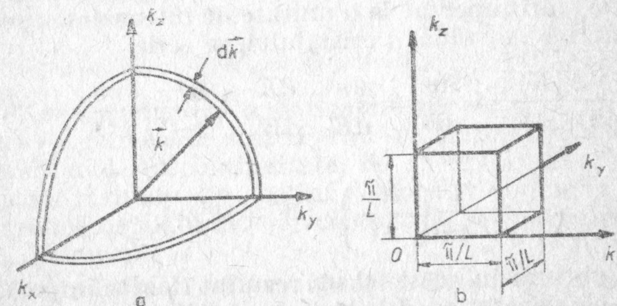


Fig. 7.10.

deci de un cub care ocupă volumul $(\pi/L)^3$ în spațiul $\vec{K}$ (fig. 7.10, b). Împărțind volumul păturii sferice cuprinse între vectorii $\vec{K}$ și $\vec{K} + d\vec{K}$ la volumul corespunzător unei stări, rezultă numărul de stări avînd numărul de undă cuprins între K și $K + dK$,

$$dN(K) = \frac{1}{8}\,\frac{4\pi K^2\,dK}{(\pi/L)^3} = \frac{VK^2\,dK}{2\pi^2}, \qquad (7.13)$$

unde V este volumul cristalului. Termenul 1/8 apare deoarece am considerat toate stările corespunzătoare variației vectorului de undă cu $d\vec{K}$ pentru toate direcțiile, pozitive și negative ale axelor de coordonate.

Numărul total de stări care se află deasupra unui nivel cu numărul de undă K este

$$N(K) = \frac{V}{2\pi^2}\int_0^K K^2\,dK = \frac{VK^3}{6\pi^2}. \qquad (7.14)$$

Acest număr trebuie multiplicat cu 2, pentru a ține seama de spin, conform principiului de excluziune a lui Pauli.

Folosind ecuația (7.10), putem exprima ușor ecuațiile (7.13) și (7.14) în funcție de energia cinetică. Pentru aceasta să observăm, folosind ecuația (7.13), că numărul de stări pe unitatea de număr de undă și unitatea de volum a cristalului se scrie

$$\frac{dN(K)}{VdK} = \frac{dn}{dK} = \frac{K^2}{2\pi^2}, \text{ unde } n = \frac{N(K)}{V}.$$

În mod asemănător, folosind (7.10), se observă că numărul de stări raportat la o unitate de interval de energie și la unitatea de volum a cristalului, se scrie

$$\frac{dN(K)}{dW\,dV} = \frac{dn}{dW} = \frac{dn}{dK}\cdot\frac{dK}{dW} = \frac{K^2}{2\pi^2}\cdot\frac{m}{\hbar^2 K} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}(W + V_0)^{1/2}.$$

Am obținut în acest fel un rezultat foarte important, anume că densitatea de stări (pe unitatea de interval de energie) este proporțională cu $(W + V_0)^{1/2}$.

Dacă un corp solid aflat la $T = 0$ K conține N electroni, atunci numărul maxim de nivele ocupate va fi $N/2$ și stărilor cele mai de jos posibile le corespunde un nivel cu energia cinetică W_F^0, dată de

$$\frac{N}{2} = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^{W_F^0}(W + V_0)^{1/2}\,dW,$$

de unde

$$W_F^0 = 4\pi^2\left(\frac{\hbar^2}{8m}\right)\cdot\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} n_e^{2/3}, \qquad (7.15)$$

unde n_e este densitatea electronilor.

Nivelul cu energia W_F^0 are o semnificație specială și se numește nivel Fermi. El reprezintă energia maximă a electronilor la temperatura $T = 0$ K. Mai jos de acest nivel, toate stările sînt ocupate, fiecare de către doi electroni diferiți prin spini, iar mai sus, toate stările sînt libere (fig. 7.11). Nivelul Fermi, aflîndu-se în interiorul gropii de potențial care reprezintă solidul metal, înseamnă că pentru a extrage electronii de pe nivelul Fermi și

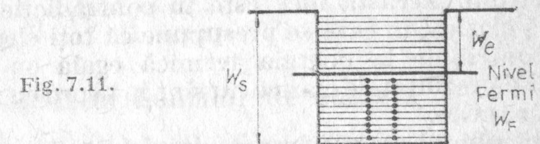


Fig. 7.11.

a-i aduce la suprafața sa este necesară energia W_e — numită și lucru de extracție. Se observă că adîncimea gropii de potențial este

$$W_s = W_F + W_e.$$

Starea energetică a sistemului de electroni la $T = 0$ K poartă numele de stare Fermi sau starea fundamentală. Suprafața de discontinuitate, de energie constantă, care desparte regiunea din spațiul vectorului de undă cu nivele energetice ocupate de cele neocupate, se numește suprafață Fermi.

Din relația (7.15) se observă că energia Fermi W_F crește cu concentrația electronilor n_e. Acest lucru se explică astfel: electronii adăugați solidului care conține N

electroni, dispuşi pe stările cele mai jos posibile, vor ocupa obligatoriu nivele energetice mai înalte, ceea ce face să crească valoarea W_F.

Se poate defini chiar o temperatură Fermi folosind relaţia clasică

$$T_F = \frac{W_F^0}{k_B},$$

unde k_B este constanta lui Boltzmann. De exemplu, pentru Na rezultă $W_F^0 = 3{,}12$ eV şi $T_F = 37\,000$ K. Această temperatură efectivă, extrem de mare, nu poate fi folosită pentru obţinerea energiei termice, deoarece reţeaua de ioni din care este format metalul nu se încălzeşte suficient. Realitatea este că reţeaua de ioni poate doar schimba energie cu electronii, care, prin excitare trec pe nivele superioare de energie. Singura energie disponibilă este aceea a reţelei însăşi care la temperatura camerei este de aproximativ 0,025 eV pe ion. De fapt vor schimba energie cu reţeaua de ioni numai o parte dintre electronii din metal şi anume cei aflaţi pe nivelul cel mai de sus şi după acest schimb vor trece pe nivele inferioare din groapa de potenţial. În mod asemănător, se argumentează faptul că la căldura specifică a solidelor contribuie un număr mic de electroni. Această idee este în contradicţie cu teoria cinetică clasică, în care se presupune că toţi electronii din solid contribuie la energia termică egală cu $(3/2)\ kT$. Desigur că rezultatele clasice nu sînt în acord cu rezultatele fizicii cuantice.

Dacă solidul se află la o temperatură $T > 0$, în urma mişcării termice unii dintre electroni pot trece pe nivele superioare nivelului Fermi, lăsînd libere stări aflate sub nivelul Fermi. Studiul distribuţiei de echilibru a electronilor aflaţi la o temperatură $T > 0$ se face cu ajutorul funcţiei de distribuţie Fermi-Dirac, care exprimă probabilitatea ca o stare cuantică cu energie W să fie ocupată la temperatura T:

$$f(W) = \frac{1}{1 + \exp\ (W - W_F)/kT}. \qquad (7.16)$$

Este clar că la $T = 0\ K$ probabilitatea ca o stare cu nivel energetic W_F să fie ocupată de electroni este constantă, egală cu unitatea sub nivelul Fermi W_F şi nulă deasupra acestui nivel. Comportarea funcţiei de distribuţie Fermi-Dirac la $0\ K$ şi la $T \neq 0$ K ($T_2 > T_1 > T$) este arătată în figura 7.12. Se observă că indiferent de temperatura solidului, pentru $W = W_F$, funcţia de distribuţie este egală cu 1/2. Rezultă de aici că putem defini nivelul Fermi ca fiind acel nivel pentru care probabilitatea de ocupare este 1/2. În mod asemănător se defineşte energia Fermi.

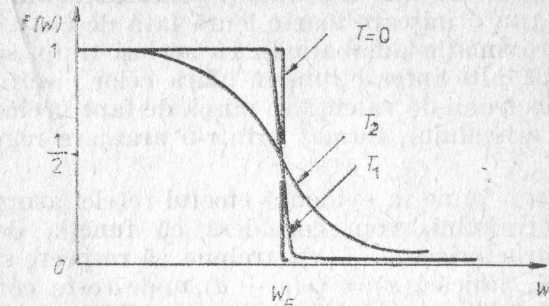


Fig. 7.12.

Dacă avem în vedere că pe fiecare nivel energetic, conform principiului lui Pauli, pot exista maximum doi electroni cu spinii antiparaleli, numărul electronilor pe nivelul cu energia W este dat de relaţia

$$n_i = \frac{2}{1 + \exp\ (W - W_F)/kT}. \qquad (7.17)$$

7.5.2. Modelul benzilor de energie

Cu ajutorul modelului electronilor liberi, descris mai sus, este posibilă explicarea satisfăcătoare a unor comportări caracteristice metalelor.

Folosind acest model, s-a dedus legea lui Ohm precum şi legea lui Wiedemann-Franz cu privire la raportul dintre conductivitatea electrică şi cea termică. Acelaşi model nu explică însă împărţirea solidelor în buni conducători electrici, cum sînt metalele, în izolatori ca de exemplu sulful şi în semiconductori cum sînt germaniul şi siliciul şi nici deosebirea în ce priveşte valorile rezistivităţii precum şi variaţia sa cu temperatura. Din aceste motive s-au căutat şi alte modele care să explice faptele experimentale.

Unul dintre modelele, care s-a impus, explicînd unele proprietăţi ale solidelor şi în special al semiconducto-

rilor, pe seama structurii lor interne este modelul benzilor de energie. La acest model se poate ajunge în mai multe moduri, din care vom indica două, în cele ce urmează.

Se poate ajunge la modelul benzilor de energie plecînd de la așa-numitul model al electronilor cvasiliberi. Conform acestui model, ionii sodiului fiind situați în nodurile rețelei cristaline, sînt considerați practic imobili sau, în orice caz, au o mișcare foarte lentă față de cea a electronilor (aproximația adiabatică). În același timp, se neglijează orice alte interacțiuni în afara celor electrostatice și deci, electronii de valență se mișcă de fapt în cîmpul periodic al cristalului, format printr-o aranjare regulată a ionilor.

Pentru a pune în evidență efectul rețelei asupra mișcării electronului, vom considera că funcția de undă care îl caracterizează, $\psi(x)$, trebuie să respecte simetria cristalului, adică $\psi(x) = \psi(x + a)$, unde a este constanta rețelei cristaline și $|\psi(x)|^2 = |\psi(x + a)|^2$, deci probabilitățile de găsire a electronului în stările x și $x + a$ sînt identice. Toate acestea arată de fapt că funcția de undă în cazul electronilor cvasiliberi, numită și funcția lui Bloch, are o amplitudine care depinde de periodicitatea rețelei,

$$\psi(\vec{r}) = u(\vec{r})\ e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}}, \tag{7.18}$$

unde $u(\vec{r})$ este amplitudinea care se repetă de la o celulă a rețelei la alta.

În cazul în care ionii rețelei sînt suficient de îndepărtați, încît între ei să nu se manifeste interacțiunea electrostatică, amplitudinea $u(\vec{r})$ a funcției de undă a electronului cvasiliber, tinde asimptotic la ψ_0 — amplitudinea funcției de undă asociată electronului liber. În acest caz, neținîndu-se seama de energia potențială de interacțiune dintre electronii liberi și ionii din nodurile rețelei, energia unui electron va fi, conform relației (7.10),

$$W = \frac{\hbar^2 K^2}{2m},$$

deci o funcție continuă de numărul de undă K. În figura 7.13 este redată reprezentarea grafică a funcției $W = f(K)$, care, după cum se vede, are forma unei parabole.

Problema care interesează este de a stabili distribuția energiei electronilor cvasiliberi din cristal. În acest scop

vom folosi, fără a reduce din generalitate, modelul simplu de rețea cristalină, unidimensională — numit și modelul Kronig-Penney. Conform acestui model, electronii de valență, satisfăcînd toți ionii aflați în nodurile rețelei cristaline, se deplasează printr-o succesiune infinită de

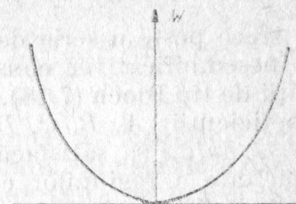


Fig. 7.13.

gropi de potențial avînd adîncimea V_0, cu ipoteza simplificatoare că potențialul este foarte mare în punctele în care se află ionii, în comparație cu restul punctelor din cristal.

Fie o succesiune de gropi de potențial de lățime a și avînd forma din figura 7.14. Ionii sînt situați în punc-

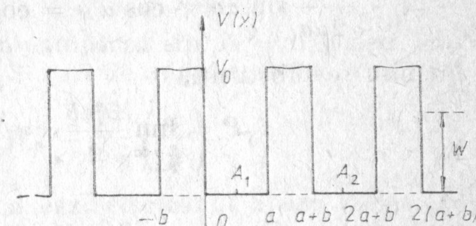


Fig. 7.14.

tele A_1, A_2, ... și sînt separați prin bariere de potențial de înălțime V_0 și lățime b, astfel că $a+b$ va fi chiar constanta rețelei cristaline.

Starea unui electron cu energia $W < V_0$ și care străbate groapa de potențial prin efect tunel este descrisă de ecuația Schrödinger,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[W - V(x)]\psi = 0.$$

Pentru regiunea în care potențialul este nul $(0 < x < a)$, soluția ecuației se scrie

$$\psi_1(x) = A\ e^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x},$$

în timp ce în regiunea maximelor de potențial ($a<x<a+q$)

$$\psi_2(x) = C e^{\beta x} + D e^{-\beta x},$$

unde

$$\alpha = [2m W/\hbar^2]^{1/2} \text{ și } \beta = [(V_0 - W)/\hbar^2]^{1/2}. \quad (7.19)$$

Vom trece peste o serie de calcule matematice intermediare nesemnificative, considerînd că $\psi_1(x)$ și $\psi_2(x)$ sînt funcții de tip Bloch (7.18). În continuare se pot determina coeficienții A, B, C, D impunînd ca funcția u și derivata sa du/dx să satisfacă condițiile de continuitate și periodicitate a regiunilor considerate. Cum însă condiția de periodicitate impune ca ecuația lui Schrödinger să rămînă invariantă față de transformarea $x \to x + a$, înseamnă că $\psi(x + a)$ poate să difere de $\psi(x)$ dar printr-un factor constant, adică $\psi(x) = e^{i\varphi} \cdot \psi(x + a)$.

În acest fel, se obține un sistem de patru ecuații omogene și din condiția ca sistemul să aibă soluții nebanale, rezultă o relație de forma

$$\frac{\beta^2 ab}{2\alpha a} \sin \alpha a + \cos \alpha a = \cos ka$$

sau, făcîndu-se substituția

$$P = \lim_{\substack{\beta\to\infty \\ b\to 0}} \frac{\beta^2 ab}{2},$$

rezultă

$$P\frac{\sin \alpha a}{\alpha a} + \cos\alpha a = \cos Ka, \quad (7.20)$$

unde P este penetrabilitatea (transparența) barierei de potențial.

S-a obținut în felul acesta o ecuație care leagă energia W conținută în termenul α și numărul de undă, expresia (7.20) fiind în același timp o soluție generală a ecuației lui Schrödinger pentru punctele O, a, $a+b$. De observat că, întrucît $-1 \leqslant \cos ka \leqslant +1$, rezultă că și

$$-1 \leqslant P\frac{\sin \alpha a}{\alpha a} + \cos \alpha a \leqslant +1,$$

ceea ce arată de fapt că electronii cvasiliberi din cristal nu pot avea orice fel de energie. Cu alte cuvinte, spectrul

energetic al electronilor cvasiliberi prezintă porțiuni permise, separate de altele interzise ale energiei.

Zonele permise sînt caracterizate de faptul că transparența barierei de potențial este totală, $P \to 0$ și din (7.20) rezultă $\alpha = K$, unde $-\frac{\pi}{a} < K < +\frac{\pi}{a}$. Avînd în vedere relația (7.19), rezultă

$$W_k = \frac{\hbar^2}{2m} K^2. \quad (7.21)$$

Aceasta este expresia energiei permise electronului liber, în funcție de numărul de undă. Zonele interzise ale energiei electronului sînt caracterizate de faptul că transparența barierei de potențial este nulă, deci $P \to \infty$, și electronul are doar o mișcare în jurul ionului său, ca și cum s-ar mișca într-o cutie. Valorile lui α care satisfac ecuația (7.20) pot fi numai acelea pentru care $\sin \alpha a = 0$, în afară de $\alpha = 0$. Din această condiție rezultă

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin \alpha a}{\alpha a} = 0 \text{ sau } \lim_{\substack{P\to\infty \\ \alpha\to 0}} P\frac{\sin \alpha a}{\alpha a} \to \infty.$$

Or, acest lucru înseamnă că $\sin \alpha a = 0$ și deci $\alpha a = n\pi$, unde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, de unde se obține

$$W_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot n^2.$$

În acest al doilea caz, electronul apare izolat, iar din $|\cos ka| = 1$ rezultă că stările nepermise apar atunci cînd numărul de undă K va lua valorile

$$K = \pm n\frac{\pi}{a};\ n = 1, 2, 3 \ldots$$

În figura 7.15 este reprezentată variația funcției,

$$F(\alpha, a) = P\cdot\frac{\sin \alpha a}{\alpha a} + \cos \alpha a,$$

în funcție de αa. Se observă că energiile electronului sînt grupate în benzi permise ΔW_1, ΔW_2, ΔW_3, ... (hașurate în desen) și benzi interzise de energie. Se constată că o dată cu creșterea energiei (conținută în termenul α), lățimea

benzilor permise se mărește, în timp ce a benzilor interzise scade. În interiorul fiecărei benzi permise energia variază continuu în funcție de numărul de undă K.

Pentru punerea în evidență a benzilor de energie, se poate reprezenta energia W a electronilor dată de relația

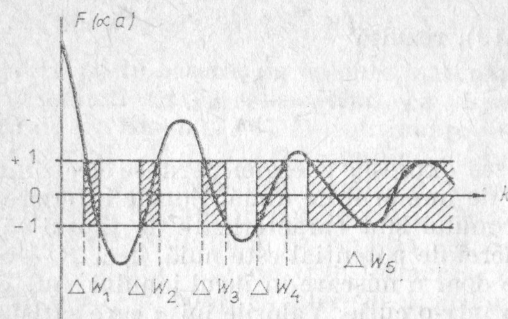


Fig. 7.15.

(7.21) în funcție de numărul de undă K. Pentru aceasta să observăm că o bandă permisă de energie s-a obținut pentru zona în care $-\frac{\pi}{a} < K < +\frac{\pi}{a}$, și o bandă nepermisă în zona $K = \pm\pi/a$. În figura 7.16 este arătată, prin

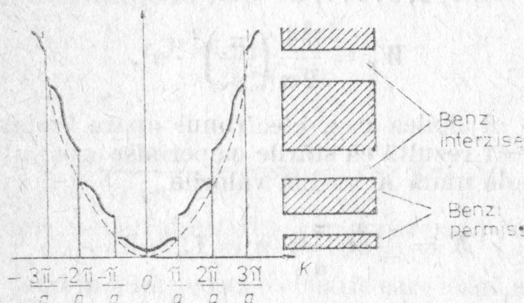


Fig. 7.16.

curba plină, dependența $W = f(K)$ pentru electronii cvasiliberi, în comparație cu aceeași dependență, pentru electronii liberi (curba punctată), iar în dreapta figurii este redat modul de dispunere a benzilor de energie.

La modelul benzilor de energie se poate ajunge urmărind procesul de formare a unei structuri cristaline simple,

unidimensionale pornind de la considerentul că un cristal este format prin apropierea unii de alții a atomilor ce formează un colectiv de atomi izolați. În cazul atomilor izolați, cînd distanța r dintre atomi este mult mai mare decît constanta rețelei cristaline ($r \gg a$), electronii își păstrează stările lor energetice din atom și se dispun pe nivelele de energie $1s$, $2s$, $2p$ etc., cu respectarea principiului lui Pauli. În figura 7.17 s-a reprezentat schematic dispunerea electronilor pe nivelele de energie corespunză-

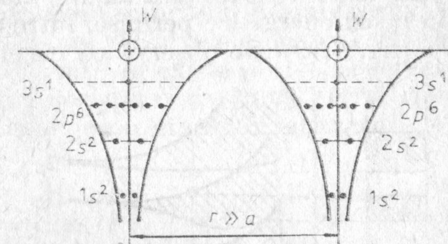


Fig. 7.17.

toare pentru doi atomi de Na aflați la distanța $r \gg a$. Nivelele energetice fiind identice pentru un grup format, de exemplu, din N atomi, spunem că vor fi de N ori degenerate. În interiorul cristalului însă, atomii sînt suficient de apropiați între ei și pentru $r \simeq a$, mișcarea electronilor unui atom este perturbată de prezența celorlalți atomi. Acest lucru conduce la modificarea nivelelor de energie și la micșorarea înălțimii barierelor de potențial pe care trebuie să le învingă electronii pentru a trece de la un atom la altul. În figura 7.18 este arătată schema nivelelor

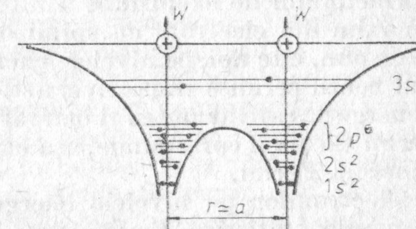


Fig. 7.18.

energetice pentru cazul cînd cei doi atomi de Na se află la o distanță unul de altul, comparabilă cu constanta re-

ţelei cristaline. Se observă că înălţimea barierei de potenţial a scăzut mult pentru electronii $1s$, $2s$ şi $2p$, în timp ce pentru electronul $3s$ această barieră a dispărut şi cei 2 electroni $3s$ ai celor doi atomi au devenit practic liberi. În plus, celor două nivele $3s$ nedegenerate ale atomului liber, le corespunde o bandă de energie $3s$, formată din două subnivele.

Prin generalizare, în cazul unui cristal real format din N atomi identici, aflaţi în nodurile reţelei, fiecare nivel energetic atomic discret se despică în N subnivele, care se grupează în benzi energetice permise, între care se află benzi interzise (fig. 7.19). Se observă că nivelele electro-

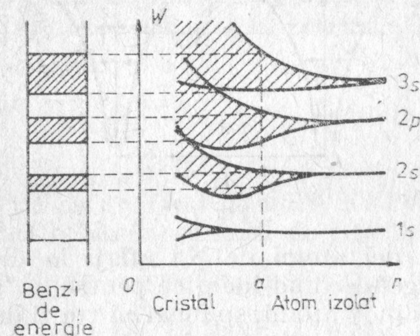


Fig. 7.19.

nice periferice sînt mai perturbate decît cele profunde şi că pe măsură ce distanţa dintre ioni scade, benzile de energie încep să se suprapună.

Fiecare bandă de energie conţine un număr limitat de nivele energetice şi la 0 K, nivelul de cea mai joasă energie, conform principiului de exclusiune a lui Pauli, poate fi ocupat de maxim doi electroni cu spinii opuşi. Restul electronilor se dispun, cîte doi, pe nivelele energetice superioare, în cadrul benzii permise respective, astfel că la 0 K, ultimul nivel energetic care ar putea fi ocupat de electroni este nivelul Fermi căruia îi corespunde, aşa cum s-a arătat mai înainte, energia Fermi.

Repartiţia electronilor pe nivelele energetice are loc ţinîndu-se seama de statistica Fermi-Dirac, astfel încît numărul electronilor pe nivelul cu energia W este dat de relaţia (7.17). Ultima bandă ocupată complet sau parţial cu electroni la 0 K s-a numit bandă de valenţă (BV), în timp ce prima bandă complet liberă de electroni la 0 K

s-a numit bandă de conducţie (BC). Electronii din benzile permise aflate sub banda de valenţă sînt electroni puternic legaţi de atomi, motiv pentru care este necesară o energie foarte mare pentru a fi smulşi din atomi.

Conform modului de ocupare a benzilor de către electroni, toate solidele pot fi clasificate în două mari grupe.

O primă grupă de solide o formează metalele, care, deasupra ultimei benzi ocupate, urmează o bandă parţial ocupată de electroni care formează banda de valenţă. La asemenea corpuri, nivelul Fermi trecînd prin banda de valenţă, în afară de nivelele ocupate de electroni aflate sub nivelul Fermi, vor exista şi nivele energetice neocupate de electroni, deasupra nivelului Fermi (fig. 7.20, a). O astfel de dispunere a nivelelor energetice se realizează la

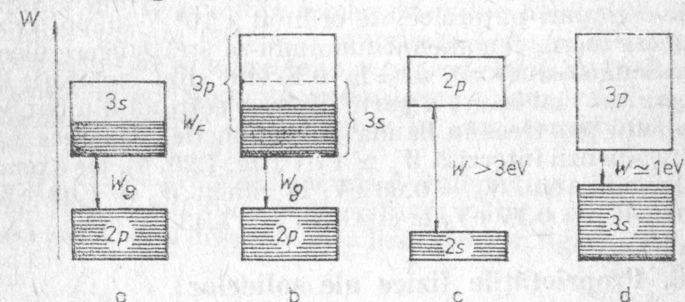


Fig. 7.20.

toate elementele ce formează metalele alcaline. De exemplu, banda de valenţă a cristalului de Na formată din nivelele 3 s ale atomilor este numai pe jumătate ocupată de electroni. O bandă parţial ocupată se poate realiza şi ca urmare a suprapunerii parţiale a unei benzi ocupate sau parţial ocupate cu o bandă liberă, neocupată, cum se întîmplă în cazul beriliului sau la metalele alcalino-pămîntoase (fig. 7.20, b). În ambele cazuri, un cîmp electric de valori obişnuite sau o temperatură mai mare de 0 K poate să treacă electronii pe stări electronice mai înalte, de exemplu, în banda de conducţie, electronii respectivi contribuind la conducţia curentului electric şi a energiei termice. Solidele care prezintă o bandă parţial ocupată sînt în general metale sau semimetale. La astfel de solide suprafaţa Fermi are sens fizic şi la $T \neq 0$ K. Asemenea suprafeţe izoenergetice pot fi suprafeţe închise sau deschise, de diferite forme, fiind funcţie de natura metalului respectiv. De exemplu, la metalele monovalente, la care

banda de valență este parțial ocupată, suprafața Fermi are forma unei sfere, motiv pentru care se mai numește și sfera Fermi.

O a doua grupă de solide o formează acelea la care deasupra ultimei benzi ocupate cu electroni urmează o bandă complet liberă, despărțite între ele printr-o bandă energetică interzisă W_g, în care este plasat nivelul Fermi. În funcție de lărgimea benzii interzise, numită și energie de activare, solidele din această grupă se împart în dielectrici (izolatori) și semiconductori. Dielectricii includ acele solide la care $W_g > 3$ eV (fig. 7.20, c). De exemplu, diamantul are $W_g = 5{,}2$ eV, iar Al_2O_3 are $W_g = 7$ eV etc. Un cîmp electric de valori obișnuite nu face posibilă trecerea electronilor din banda de valență în banda de conducție. Cîmpuri puternice, de ordinul a 10^8 V/m pot realiza acest lucru, fenomenul numindu-se străpungere electrică. Semiconductorii, deși la 0 K sînt și ei izolatori, la temperaturi mai înalte o parte dintre electronii din banda de valență pot trece în banda de conducție, deoarece au lărgimea benzii interzisă $W_g \simeq 1$ eV (fig. 7.20, d). De exemplu, la germaniu $W_g = 0{,}66$ eV, la siliciu $W_g = 1{,}08$ eV, la SbIn $W_g = 0{,}17$ eV, la AsGa $W_g = 1{,}43$ eV etc.

7.6. Proprietățile fizice ale solidelor

Proprietățile fizice ale corpurilor solide depind atît de elementele rețelei cristaline și de interacțiunile dintre particulele aflate în nodurile rețelei, cît și de mișcarea electronilor liberi sau cvasiliberi și interacțiunea dintre ei și elementele bazei rețelei cristaline. Unele dintre proprietățile fizice ale solidelor, cum sînt proprietățile mecanice și termice pot fi interpretate, neglijînd mișcarea electronilor sau în orice caz aceștia contribuind cu un termen de corecție la mărimea mecanică sau termică. În același timp, proprietățile electrice și magnetice pot fi înțelese numai considerînd mișcarea electronilor prin rețeaua cristalină. În cele ce urmează vom discuta pe scurt unele proprietăți fizice ale corpului solid.

7.6.1. Proprietăți mecanice

O serie de proprietăți mecanice, cum sînt elasticitatea, plasticitatea, duritatea, fluajul, ductilitatea, rezistența la oboseală etc., constituie și cele mai caracteristice pro-

prietăți ale solidelor. Cunoașterea lor este de mare importanță în industrie și în economie în general, motiv pentru care au fost studiate de-a lungul timpului. O serie de nume date diferitelor perioade ale culturii umane, cum sînt epoca de piatră, epoca bronzului sau epoca fierului, reflectă numele unor solide, ale căror proprietăți mecanice au determinat un salt calitativ în procesul dezvoltării societății umane.

Proprietățile mecanice ale solidelor enumerate mai sus se datorează în special proprietăților rețelei cristaline.

Presupunem că o forță deformatoare acționează asupra unui corp solid. Sub acțiunea acestei forțe, constituienții (atomi, ioni) ce formează rețeaua cristalină se deplasează din pozițiile lor de echilibru, solidul suferind o deformație. Dacă forța deformatoare nu este prea mare, deci distanța dintre nodurile rețelei cristaline nu depășește o anumită valoare critică, la suprimarea forței dispare și deformația care se numește în acest caz elastică. Din contră, dacă forța deformatoare depășește o anumită valoare, deformația devine plastică, caz în care corpul nu mai revine la forma inițială.

În § 7.2 s-a arătat că energia de interacțiune dintre doi atomi A și B este funcție de distanța r dintre ei, așa cum arată curba $V(r)$ desenată prin linie plină în figura 7.21, a.

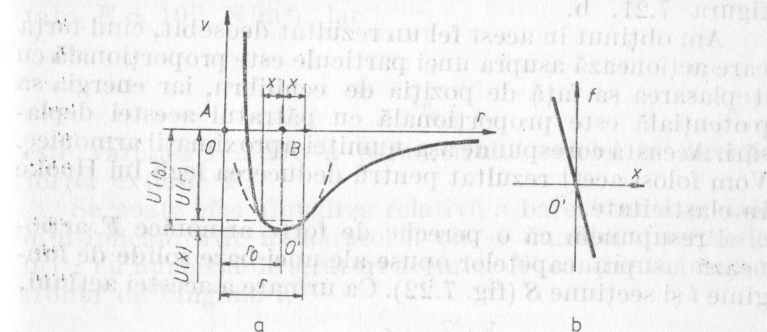


Fig. 7.21.

Dacă atomul B se deplasează cu distanța x de poziția de echilibru r_0, atunci la un moment dat se va afla, față de atomul A, la distanța $r = r_0 + x$ și energia particulei devine $V(r)$. Se poate calcula variația energiei particulei $V(x) = V(r) - V(r_0)$ prin dezvoltarea în serie Taylor a

funcţiei $V(x)$ după puterile lui x,

$$V(x)=\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r_0}x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)_{r_0}x^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial r^3}\right)_{r_0}x^3+\dots \tag{7.22}$$

Întrucît curba energiei potenţiale trece printr-un minim în dreptul punctului O', rezultă că $(\partial V/\partial r)_{r_0}=0$ şi deci

$$V(x)\simeq\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)\cdot x^2=\frac{1}{2}kx^2,$$

unde k este constanta de elasticitate a corpului. Această expresie este doar aproximativă, întrucît am considerat numai termenul pătratic din relaţia 7.22, neglijînd termenii de ordin superior. Dependenţa corectă $V=f(r)$ este exprimată prin parabola desenată punctat în figura 7.21, a.

În mod asemănător, forţa de interacţiune dintre cei doi atomi, cînd distanţa dintre ei variază cu valoarea x, va fi

$$f=-\frac{\partial V(x)}{\partial x}=-kx,$$

variaţia forţei în funcţie de distanţa x fiind arătată în figura 7.21, b.

Am obţinut în acest fel un rezultat deosebit, cînd forţa care acţionează asupra unei particule este proporţională cu deplasarea sa faţă de poziţia de echilibru, iar energia sa potenţială este proporţională cu pătratul acestei deplasări. Aceasta corespunde aşa-numitei aproximaţii armonice. Vom folosi acest rezultat pentru deducerea legii lui Hooke în elasticitate.

Presupunem că o pereche de forţe armonice F acţionează asupra capetelor opuse ale unei bare solide de lungime l şi secţiune S (fig. 7.22). Ca urmare a acestei acţiuni,

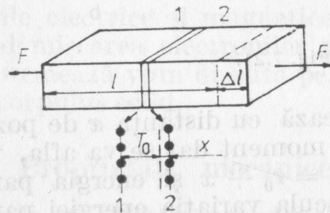


Fig. 7.22.

distanţa dintre două plane cristaline vecine creşte cu valoarea x, iar întreaga bară se alungeşte cu Δl. În bara respectivă apar tensiuni interne F care se vor opune deplasării atomilor din nodurile reţelei cristaline, faţă de poziţia de echilibru,

$$F=f\,N=N\,k\,x,$$

unde N este numărul de particule din stratul atomic de secţiune S.

Efortul unitar care apare în bară va fi

$$\sigma=\frac{F}{S}=\frac{N}{S}kx=cx,$$

unde $c=N\,k/S$. Multiplicînd şi împărţind termenul drept din ultima relaţie cu r_0 — distanţa dintre două plane cristaline vecine, se obţine

$$\sigma=cr_0\frac{x}{r_0}=E\varepsilon,$$

unde

$$E=cr_0=\frac{N}{S}kr_0$$

este modul de elasticitate, sau modulul lui Young (la metale $E\simeq10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$), iar

$$\varepsilon=\frac{x}{r_0}$$

este variaţia relativă a parametrului reţelei în direcţia forţei externe F.

Se poate găsi alungirea relativă a barei studiate, dacă multiplicăm atît numărătorul cît şi numitorul expresiei lui ε cu numărul de straturi atomice N' conţinute în eşantionul de lungime l,

$$\varepsilon=\frac{xN'}{r_0N'}=\frac{\Delta l}{l}.$$

În acest fel, relaţia

$$\sigma=E\varepsilon$$

reprezintă bine-cunoscuta lege a lui Hooke, care afirmă că efortul unitar este proporţional cu alungirea relativă, cînd forţa deformatoare nu depăşeşte o anumită valoare

Modulul de elasticitate E depinde numai de natura constituienților din care este făcut corpul și din modul lor de aranjare în rețeaua cristalină. În figura 7.23 este arătată variația $\sigma = f(\varepsilon)$. Proporționalitatea dintre σ și ε se respectă numai pe porțiunea liniară OP, iar pe porțiunea PC, coexistă atît deformația elastică cît și cea plastică. În punctul $C(\sigma_C, \varepsilon_C)$, numit punct critic, începe deformația plastică, deformație ce se menține total sau parțial și după suprimarea forței. Punctul critic reprezintă limita de curgere sau de fluiditate, după care materialul „curge" fără vreo solicitare suplimentară. Dacă după atingerea limitei de elasticitate, curba $\sigma = f(\varepsilon)$ prezintă porțiunea QZ, se spune că materialul din care este făcută bara de studiat suferă o transformare numită ecruisaj. Fenomenul are loc la metale și aliaje și constă în întărirea lor ca urmare a deformării la rece. Pentru a reveni la proprietățile anterioare, metalul se recoace, ceea ce face ca cristalele deformate să se recristalizeze, adică să revină la forma lor inițială.

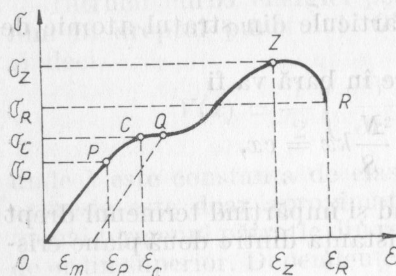


Fig. 7.23.

Crescînd în continuare efortul unitar, se ajunge în punctul Z, numit limită de rezistență, cînd bara începe să se gîtuie, iar în punctul R are loc ruperea ei.

Atît la întindere cît și la comprimare se schimbă și dimensiunile transversale ale barei. Dacă d_0 este dimensiunea transversală, se verifică relația

$$\beta = \frac{\Delta d}{d_0} = -\mu \frac{\Delta l}{l_0} = -\mu \frac{\sigma}{E},$$

unde μ este coeficientul lui Poisson ($\mu \simeq 0{,}3$ pentru metale).

Există totuși unele deosebiri între datele experimentale privind caracteristicile mecanice ale corpului solid și cele teoretice, dacă pentru acestea din urmă s-a folosit

modelul de corp solid constituit din cristale ideale. Acest lucru a fost pus pe seama rețelei cristaline imperfecte, care stă la baza constituirii corpurilor naturale. S-a constatat, de exemplu, că dislocațiile au un rol hotărîtor în gradul de manifestare al unor proprietăți ale solidelor. Un număr mare de dislocații într-un metal îl face mai ușor deformabil, cheltuindu-se o energie mai mică pentru deformare.

Alte proprietăți caracteristice metalelor, cum sînt oboseala metalelor (proprietatea de a deveni casante ca urmare a deselor solicitări) și fluajul (variația deformațiilor în timp) n-au primit încă o explicație științifică satisfăcătoare.

7.6.2. Proprietăți termice

Ca și proprietățile mecanice și proprietățile termice ale solidelor pot fi explicate pe seama comportării particulelor ce se află în nodurile rețelei cristaline. Dintre proprietățile termice vor fi discutate pe scurt căldura molară, conductivitatea termică și dilatarea termică.

Căldura molară C a solidelor se definește ca fiind căldura necesară unui mol de substanță pentru a-i ridica temperatura cu un grad.

Căldura masică c, este căldura necesară unității de masă de substanță pentru a-i ridica temperatura cu un grad. Cele două mărimi sînt legate prin relația $C = \mu c$, μ fiind masa unui mol de substanță și deci C și c au aceleași variații la variația unor parametri. Au fost imaginate mai multe modele pentru explicarea căldurii molare (specifice). În modelul clasic se consideră că fiecare atom aflat în nodul rețelei cristaline reprezintă un oscilator armonic liniar și independent, care poate oscila pe trei direcții reciproc perpendiculare. Conform mecanicii clasice, fiecare oscilator posedă energia pe un grad de libertate egală cu $k_B T$, formată din energie cinetică și energie potențială, în părți egale (k_B este constanta lui Boltzmann).

Considerînd că cristalul este compus din N atomi, fiecare avînd trei grade de libertate, rezultă că energia internă va fi

$$U = 3N\, k_B T,$$

iar căldura molară la volum constant a corpului va fi

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 3\,N k_B.$$

Dacă se va lua chiar un mol de solid, deci N va fi egal cu numărul lui Avogadro N_A şi cum $N_A \cdot k_B = R$ — constanta universală a gazelor, rezultă

$$C_V = 3\ R = 25\ \text{J/grad. mol},$$

ceea ce arată că de fapt căldura molară are valoare constantă şi este independentă de temperatura şi de natura solidului. Acest enunţ reprezintă legea lui Dulong şi Petit.

Experienţa a arătat însă că spre temperaturi mai mici, legea nu este valabilă şi, conform principiului al treilea al termodinamicii, căldura molară tinde spre zero. În figura 7.24 este arătată dependenţa $C_V = f(T)$ pentru cîteva substanţe solide. Linia punctată corespunde valorii căldurii molare, date de legea lui Dulong-Petit.

Pentru a explica comportarea căldurii molare la temperaturi mici, Einstein a elaborat un nou model de solid,

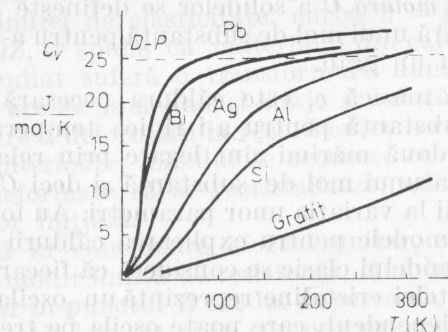


Fig. 7.24.

ţinînd seama de cuantificarea energiei sistemelor de particule legate. Conform acestui model, cele N particule din nodurile reţelei cristaline constituie $3N$ oscilatori armonici liniari, independenţi, care oscilează toţi cu aceeaşi frecvenţă $\nu = \omega/2\pi$. Conform teoriei elaborate de Planck, energia fiecărui oscilator variază în salturi egale cu $\varepsilon = \hbar\omega$ şi nu continuu, cum afirmă mecanica clasică.

Întrucît chiar la 0 K, fiecare asemenea oscilator mai posedă o energie de zero $\varepsilon_0 = h\nu/2$, rezultă că energia

totală a oscilatorului va fi

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0 + n\varepsilon \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Se poate calcula energia medie $<\varepsilon>$ a oscilatorului considerînd că probabilitatea $\mathfrak{P}_n$ ca oscilatorul să posede energia ε_n este dată de formula lui Boltzmann,

$$\mathfrak{P}_n = A \exp\left[-\varepsilon_n/(kT)\right] = A \exp\left[-(\varepsilon_0 + n\varepsilon)/(kT)\right],$$

unde A este o constantă, ce se determină din condiţia de normare a probabilităţii,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{P}_n = \exp\left[-\varepsilon_0/(kT)\right] A \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-n\varepsilon/(kT)\right] = 1.$$

Se poate scrie energia medie a oscilatorului astfel:

$$\langle\varepsilon\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \mathfrak{P}_n =$$

$$= \varepsilon_0 + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} n \exp\left[-n\varepsilon/(kT)\right] / \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-n\varepsilon/(kT)\right].$$

Conform formulei pentru progresia geometrică, avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-n\varepsilon/(kT)\right] = \{1 - \exp[-\varepsilon/(kT)]\}^{-1}$$

Diferenţiind ambii termeni în raport cu ε, se obţine

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \exp\left[-n\varepsilon/(kT)\right] =$$

$$= \exp\left[-\varepsilon/(kT)\right]\{1 - \exp[-\varepsilon/(kT)]\}^{-2}$$

şi deci energia medie a oscilatorului se scrie

$$\langle\varepsilon\rangle = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon}{\exp\left[\varepsilon/(kT)\right] - 1}$$

Considerînd că cristalul conţine N_A oscilatori, rezultă energia

$$U = 3N_A\langle\varepsilon\rangle = 3N_A\varepsilon_0 + \frac{3N_A}{\exp\left[\varepsilon/(kT)\right] - 1},$$

de unde se obține căldura molară la volum constant,

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 3N_A k\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 \exp\,[\varepsilon/(kT)]/$$
$$/\{\exp\,[\varepsilon/(kT)] - 1\}^2.$$

Aceasta reprezintă formula lui Einstein pentru căldura molară și ea descrie corect variația $C_V = f(T)$. Se observă că pentru temperaturi suficient de mari ($T \to \infty$), $C_V \to 3N_A k = 3R$, iar pentru $T \to 0$ se obține

$$C_V = 3R\,[\varepsilon/(kT)]^2 \exp\,[-\varepsilon/(kT)] \to 0.$$

Dacă se compară rezultatele experimentale ale căldurii molare cu cele teoretice, obținute din teoria lui Einstein, se constată unele abateri la temperaturi mici. Formula lui Einstein dă valori mai mici decît cele experimentale, datorită faptului că s-a impus ca oscilatorii să fie independenți și să oscileze toți cu aceeași frecvență.

Din acest motiv, s-a impus dezvoltarea unui alt model de solid, care să țină seama de interacțiunea dintre atomii aflați în nodurile rețelei cristaline. Un model îmbunătățit a fost propus de Debye, care are la bază atît conceptul de cuantificare a energiei oscilaților din rețeaua cristalină, cît și faptul că rețeaua solidului este considerată ca o unitate în care se propagă undele mecanice. Asemănător fotonilor din fluxul electromagnetic, se consideră că purtătorii undelor mecanice din cristal sînt niște particule fictive, numite fononi, al căror număr crește proporțional cu temperatura.

Conductivitatea termică. Conducția termică este un fenomen de transfer și, ca și alte fenomene de acest tip, el are loc ca urmare a existenței unei situații de neechilibru în sistem. Mai concret, existența unui gradient de temperatură în solid, face posibil transferul energiei termice, dintr-o parte a solidului, în care temperatura este mai mare, în altă parte a solidului, în care temperatura este mai mică.

În cazul solidelor, transferul de energie se realizează prin diverse mecanisme, în funcție de tipul solidului: electronii liberi la metale și fononii în dielectrici și semiconductori. La oricare dintre tipurile de solide, considerat

ca mediu izotrop, experiența arată că este valabilă legea lui Fourier,

$$Q = -\eta\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}, \qquad (7.23)$$

unde Q este densitatea fluxului de căldură.

Vom descrie pe scurt un model cinetic, din care să rezulte expresia coeficientului de proporționalitate η, numit coeficient de conductivitate termică. În acest scop, considerînd că electronii și fononii formează un amestec de gaze, ca urmare a ciocnirilor electron-electron sau fonon-fonon, energia este transferată în direcția scăderii gradientului de temperatură, transferul avînd loc pînă la stabilirea unui echilibru termic.

Fie deci trei plane paralele, separate prin distanțe egale cu drumul liber mediu (fig. 7.25). Presupunînd că fiecare dintre componenți se deplasează cu viteza medie

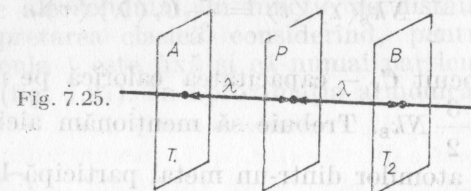


Fig. 7.25.

$\langle v\rangle$ și că această viteză nu se schimbă pe distanța drumului liber mediu, înseamnă că prin planul imaginar P trec liber de la stînga la dreapta o șesime din numărul total de particule aflate la temperatura T_1, iar energia transferată prin unitatea de arie și în unitatea de timp va fi

$$Q_A = \frac{1}{6}\,N\langle v\rangle\left(\frac{3}{2}\,k_B T_1\right),$$

unde k_B este constanta Boltzmann, iar $\langle v\rangle$ este viteza medie a undelor mecanice, care este egală cu viteza sunetului prin solidul respectiv.

În mod asemănător, energia transferată de la dreapta spre stînga va fi

$$Q_B = \frac{1}{6}\,N\langle v\rangle\left(\frac{3}{2}\,k_B T_2\right).$$

Considerînd $T_1 > T_2$, energia netă transferată va fi

$$Q = \frac{1}{4} N\langle v\rangle k_B (T_1 - T_2).$$

Conform celor spuse mai sus, o particulă suferă două ciocniri, una în planul P și alta în planul B, astfel că gradientul de temperatură traversat va fi

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_1 - T_2}{2\langle \lambda \rangle}.$$

Înlocuind aceste rezultate în relația (7.23), rezultă

$$\frac{1}{4} N\langle v\rangle k_B (T_1 - T_2) = \eta \frac{T_1 - T_2}{2\langle \lambda \rangle},$$

de unde

$$\eta = \frac{1}{2} N k_B \langle \lambda \rangle \langle v \rangle = \frac{1}{3} C_V \langle \lambda \rangle \langle v \rangle, \qquad (7.24)$$

în care am înlocuit C_V — capacitatea calorică pe unitatea de volum, cu $\frac{3}{2} N k_B$. Trebuie să menționăm aici că nu toți electronii atomilor dintr-un metal participă la transferul energiei termice. La temperatura camerei, vor realiza acest lucru numai electronii din apropierea nivelului Fermi, deoarece numai aceștia pot efectua salturi cuantice. Acest lucru arată, o dată în plus, că gazul electronic nu este în totalitate analog cu gazul termodinamic, una dintre deosebiri constînd în aceea că gazului electronic nu i se poate aplica teorema echipartiției energiei pe grade de libertate.

Variația coeficientului de conductivitate termică în funcție de temperatură prezintă un maxim la o temperatură caracteristică fiecărui solid și apoi scade, atît spre temperaturi mai mari, cît și spre temperaturi mai joase (fig. 7.26). La temperaturi mai mari decît temperatura caracteristică, scăderea lui η se datorează scăderii lui $\langle\lambda\rangle$, care este proporțional cu $1/T$; la temperaturi sub cele caracteristice, apropiate de 0 K, scăderea lui η are loc datorită scăderii lui C_V, care scade ca T^3.

Dilatarea termică este fenomenul fizic care constă în creșterea dimensiunilor geometrice ale corpului solid în urma măririi temperaturii sale, fără schimbarea stării de agregare. Pentru a explica dilatarea corpurilor, să vedem ce se întîmplă cu dimensiunile rețelei cristaline, atunci cînd solidului i se transferă energie.

Se constată că o parte considerabilă a energiei transferate solidului, se regăsește sub forma energiei mecanice a particulelor aflate în nodurile rețelei cristaline. Aceasta înseamnă că cu cît crește mai mult temperatura, cu atît crește amplitudinea de vibrație a particulelor aflate în nodurile rețelei cristaline. Rezultă că spațiul măsurat dintre nodurile rețelei cristaline este de fapt o medie între o valoare maximă și una minimă a constantei rețelei. Din acest motiv este interesant de cunoscut, de exemplu, cum variază constanta rețelei cristaline cu temperatura și în general de aflat care este explicația dilatării solidelor la creșterea temperaturii.

Pentru a răspunde la aceste probleme, să revenim la dependența energiei potențiale de interacțiune dintre două particule ale solidului, în funcție de distanța dintre ele, în interpretarea clasică, considerînd, pentru simplitate, că particula 1 este fixă și că numai particula 2 poate să vibreze (fig. 7.27). În aproximația armonică, această dependență este reprezentată prin curba punctată $a'c'$ care este o parabolă, simetrică față de linia bd. Valoarea constantei rețelei cristaline pentru un solid oarecare rezultă din echilibrul dintre forțele atractive și cele repulsive, ca și energiile potențiale respective. La 0 K particulele ocupă nivelul cel mai de jos U_0, corespunzător fundului gropii de potențial. Valoarea constantei rețelei este egală cu distanța măsurată pe abscisă, pînă în punctul corespun-

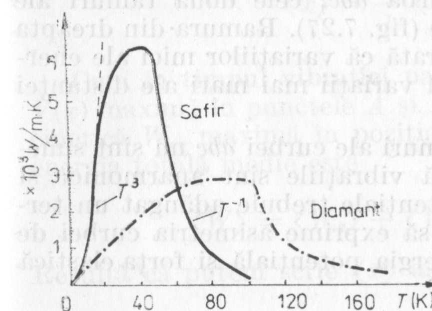


Fig. 7.26.

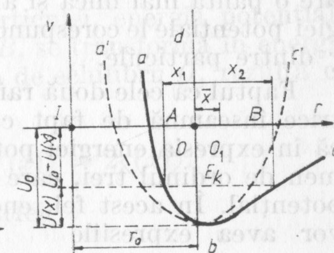


Fig. 7.27.

zător minimului energiei potențiale de interacțiune; fie această valoare egală cu r_0.

Pe măsura creșterii temperaturii, o parte din energie se află sub formă de energie mecanică. Deși amplitudinea vibrațiilor crește, dacă se ține seama numai de aproximația armonică, n-ar trebui ca solidul să-și schimbe dimensiunea. Într-adevăr, în cazul aproximației armonice, deplasarea particulei cu distanța x de la poziția de echilibru este strict proporțională cu această distanță,

$$f(x) = -k\,x, \tag{7.25}$$

iar energia potențială este

$$V(x) = kx^2. \tag{7.26}$$

Cum forța $f(x)$ rămîne constantă în timp, pentru o temperatură dată, rezultă că și deplasările x_1 și x_2, efectuate de particulă, în dreapta și în stînga punctului de echilibru vor fi egale, deci $\langle x \rangle = 0$ și media constantei rețelei cristaline rămîne practic aceeași la orice temperatură, deși amplitudinea de vibrație crește o dată cu temperatura.

Dacă se ține seama de termenii de ordin superior, graficul energiei potențiale nu mai este o curbă simetrică, ci este reprezentat prin crurba *abc*, cele două ramuri ale curbei avînd pante diferite (fig. 7.27). Ramura din dreapta are o pantă mai mică și arată că variațiilor mici ale energiei potențiale le corespund variații mai mari ale distanței r dintre particule.

Faptul că cele două ramuri ale curbei *abc* nu sînt simetrice înseamnă de fapt că vibrațiile sînt anarmonice și că în expresia energiei potențiale trebuie adăugat un termen de ordinul trei, care să exprime asimetria curbei de potențial. În acest fel, energia potențială și forța elastică vor avea expresiile

$$V(x) = \frac{kx^2}{2} - \frac{gx^3}{3}, \tag{7.27}$$

$$f(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx + gx^2, \tag{7.28}$$

unde g este coeficientul de anarmonicitate.

Ca rezultat, apare faptul că deplasările x_1 și x_2 ale particulei 2 de-o parte și de alta a poziției de echilibru nu

vor mai fi egale, în timp ce media amplitudinilor de vibrație va fi diferită de zero, $\langle x \rangle \neq 0$.

Ținînd seama de toate acestea, să exprimăm coeficientul de dilatare termică liniară. Valoarea medie a forței ce deplasează particula 2 din poziția de echilibru este

$$\langle f \rangle = -k\langle x \rangle + g\langle x^2 \rangle.$$

În starea de echilibru termic, cînd particula vibrează liber, $\langle f \rangle \equiv 0$ și deci $g\langle x^2 \rangle = k\langle x \rangle$. Se obține

$$\langle x \rangle = \frac{g}{k}\langle x^2 \rangle. \tag{7.29}$$

Pe de altă parte, scriind media energiei potențiale sub forma

$$\langle V(x) \rangle \simeq \frac{k}{2}\langle x^2 \rangle, \tag{7.30}$$

rezultă că

$$\langle x^2 \rangle \simeq \frac{2\langle V(x) \rangle}{k}$$

care, înlocuită în (7.29), dă

$$\langle x \rangle = \frac{2g}{k}\langle V(x) \rangle.$$

Cum în timpul vibrației particulei, energia potențială $V(x)$ maximă în punctele A și B, se transformă în energia cinetică W_c, maximă în poziția de echilibru O, rezultă că energia totală medie este

$$\langle W \rangle = \langle W_c \rangle + \langle V(x) \rangle = 2\langle (x) \rangle.$$

Rezultă că putem scrie $\langle x \rangle$ astfel

$$\langle x \rangle = \frac{g}{k^2}\langle W \rangle. \tag{7.31}$$

Ținînd seama că, prin definiție, dilatarea liniară relativă se definește ca raportul $\langle x \rangle / r_0$, unde r_0 este distanța de echilibru, rezultă

$$\frac{\langle x \rangle}{r_0} = \frac{g}{k^2 r_0}\langle W \rangle.$$

Conform principiului de echipartiţie a energiei pe grade de libertate, avem $\langle W \rangle = k_B T/2$ şi deci

$$\frac{\langle x \rangle}{r_0} = \frac{g k_B}{k^2 r_0} \cdot T. \tag{7.32}$$

Conform relaţiei de definiţie a coeficientului de dilatare liniară $\alpha = (l - l_0)/l_0 T$, ţinînd seama de (7.32) rezultă

$$\alpha = \frac{\langle x \rangle}{r_0 T} = \frac{g k_B}{k^2 r_0}. \tag{7.33}$$

Înlocuind valorile lui g, k_B, k şi r_0 se obţin pentru α valori de ordinul 10^{-4}—10^{-5} grad^{-1}, ceea ce înseamnă cam 1 mm pentru 1 m lungime la 100°C, în bun acord cu datele experimentale.

Legea dilatării liniare (7.33) rămîne valabilă numai la valori medii ale temperaturii, întrucît la $T \to 0$K, dilatarea este practic absentă, iar la temperaturi mai ridicate, în apropierea celei de topire, apar abateri considerabile.

7.6.3. Proprietăţi electrice

Conductivitatea electrică. Cea mai importantă proprietate caracteristică dintre proprietăţile electrice ale solidelor este rezistenţa electrică R, care este funcţie de natura şi geometria lor. Pentru un solid de formă paralelipipedică avînd lungimea l şi aria secţiunii S, avem $R = \rho l/S$, unde R se măsoară în ohmi (Ω), iar ρ — rezistivitatea în $(\Omega \cdot m)$. Conductivitatea electrică $\sigma = 1/\rho$ este mărimea inversă rezistivităţii şi se măsoară în $(\Omega^{-1} m^{-1})$. Conductivitatea solidelor este o mărime foarte importantă şi ea are valori cuprinse între $10^8\ \Omega^{-1} m^{-1}$ pentru cupru şi $10^{-15} \Omega^{-1} m^{-1}$ pentru polistiren. Această gamă largă de valori a conductivităţii electrice şi interdependenţa sa cu alte mărimi fizice au determinat căutarea unor explicaţii pentru interpretarea faptelor experimentale observate.

Prima teorie a conductivităţii electrice a fost dată de Drude; teoria are la bază existenţa electronilor liberi în metale, numiţi şi electroni de conducţie. Drude consideră metalul ca o reţea de ioni pozitivi printre care se mişcă liber electronii cu viteza termică constantă, pentru o temperatură dată, conform legilor teoriei cinetice. Prin aplicarea unui cîmp electric $\vec{E}$, viteza electronului liber

se modifică şi apare o componentă a sa, numită viteza de alunecare sau viteza de drift. În acelaşi timp, ciocnirile electronilor cu reţeaua cristalină determină ca aceştia să piardă din energia lor, fenomenul în sine fiind cauza rezistenţei electrice.

Într-o astfel de ciocnire, un electron individual îşi poate reduce viteza de drift la zero, pentru ca imediat după aceasta să atingă din nou valoarea dinainte de ciocnire. În această situaţie, densitatea de curent $\vec{j}$ este de forma

$$\vec{j} = n e \vec{u}, \tag{7.34}$$

unde n este numărul de electroni din unitatea de volum, e — sarcina electronului şi u — viteza de drift.

Dacă timpul mediu dintre ciocniri este 2τ, în acest timp asupra electronului va acţiona forţa $\vec{F} = -e\vec{E}$, unde $\vec{E}$ este intensitatea cîmpului aplicat.

Aplicînd legea a doua a dinamicii, rezultă

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E} \quad (m = \text{masa electronului}),$$

$$\mathrm{d}\vec{u} = -\frac{e\vec{E}}{m}\mathrm{d}t,$$

$$\vec{u} = -e\frac{\vec{E}t}{m} + \text{const.}$$

Folosind această relaţie, rezultă că viteza electronului în momentul imediat dinaintea ciocnirii $(t = 2\tau)$ este: $-(e\vec{E}\,2\tau)/m$ iar viteza medie va fi

$$\vec{u} = -\frac{e\vec{E}}{m} \cdot \tau,$$

unde τ se numeşte timp de relaxare şi reprezintă timpul necesar pentru ca probabilitatea de ciocnire să fie egală cu unitatea.

Înlocuind expresia vitezei de drift în (7.34), se obţine

$$\vec{j} = \frac{n e^2 \vec{E}}{m}\tau$$

şi avînd în vedere legea lui Ohm,

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \tag{7.35}$$

rezultă conductivitatea electrică,

$$\sigma = \frac{\vec{j}}{\vec{E}} = \frac{ne^2\tau}{m} = ne\left(\frac{e\tau}{m}\right) \qquad (7.36)$$

și pentru viteza de drift,

$$\vec{u} = \frac{e\tau}{m}\vec{E}.$$

Viteza în cîmp electric unitar se numește mobilitate și are expresia

$$\mu = \frac{u}{E} = \frac{e\tau}{m}.$$

Unitatea pentru mobilitate este $m^2 \cdot s^{-1} \cdot V^{-1}$. Înlocuind $\vec{u} = \mu\vec{E}$ în (7.34) și ținînd seama de (7.35), rezultă

$$\vec{j} = ne\mu\vec{E},$$

$$\sigma = ne\mu. \qquad (7.37)$$

Relația (7.37) are o importanță fundamentală. Conductivitatea electrică depinde de doi factori: numărul n al purtătorilor de sarcini din unitatea de volum și mobilitatea lor μ. Modul în care acești doi factori variază cu temperatura determină înțelegerea proprietăților electrice ale solidului. De exemplu, la metale n este constant, iar μ variază puțin cu temperatura. La semiconductori, variația exponențială a lui n cu temperatura este esențială, în timp ce la izolatori n este constant, iar μ variază exponențial cu temperatura. Iată de ce înțelegînd modul în care contribuie n și μ la valoarea lui σ, ne dăm seama de spectrul larg de valori ale acestei mărimi fizice.

Extinzînd teoria clasică a lui Drude, se poate ajunge la legea lui Wiedemann-Franz, care dă raportul dintre conductivitatea termică și conductivitatea electrică, folosind teoria cinetică.

Conform celor spuse mai înainte, cînd s-a vorbit despre conductivitatea termică, între viteza termică $\langle v\rangle$ și drumul liber mediu $\langle\lambda\rangle$ există relația

$$2\tau = \frac{\langle\lambda\rangle}{\langle v\rangle}. \qquad (7.38)$$

Să notăm că viteza termică $\langle v\rangle$, definită din teoria cinetico-moleculară, nu este aceeași cu viteza de drift u. În timp ce $\langle v\rangle$ reprezintă o viteză medie, corespunzătoare stării termodinamice de echilibru a sistemului și este de ordinul $4 \cdot 10^3$ m/s, la temperatura camerei, u — viteza de drift — este de ordinul 10^{-3} m/s și se adună vectorial cu viteza termică, pentru a obține viteza totală a electronului.

Conductivitatea termică χ a electronilor liberi, care formează gazul electronic este de forma (7.24)

$$\chi = \frac{1}{2}nk_B\langle\lambda\rangle\langle v\rangle.$$

Folosind (7.36) și (7.38), se obține

$$\sigma = \frac{ne^2\langle\lambda\rangle}{2m\langle v\rangle}. \qquad (7.39)$$

Deoarece în statistica clasică

$$\frac{1}{2}m\langle v\rangle^2 = \frac{3}{2}k_BT, \qquad (7.40)$$

rezultă

$$m\langle v\rangle = \frac{3k_BT}{\langle v\rangle},$$

astfel incît

$$\sigma = \frac{ne^2\langle\lambda\rangle\langle v\rangle}{6k_BT},$$

de unde

$$\frac{\chi}{\sigma} = 3\left(\frac{k_B}{e}\right)^2 T,$$

care reprezintă legea lui Wiedemann-Franz. Constanta de proporționalitate $3(k_B/e)^2$ se numește numărul lui Lorentz și are valoarea $2{,}23 \times 10^{-8}$ WΩ grad^{-2}, în bună concordanță cu valorile experimentale ale lui $\chi/\sigma T$ pentru o serie întreagă de metale, la temperatura camerei.

Relația (7.40) prezice o dependență greșită a lui σ de temperatură; folosind expresia (7.36), se obține

$$\sigma \sim \tau \sim \frac{1}{\langle v\rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{T}} \text{ și deci } \rho \sim \sqrt{T}.$$

Într-adevăr, această dependență nu este corectă, deoarece experiența arată că $\rho \sim T$. Eroarea este legată de faptul că am dedus dependența lui ρ de temperatură, din dependența vitezei electronului de temperatură. Dar, aceasta ne conduce la concluzia că electronii din metale nu pot fi asimilați cu un gaz din teoria cinetico-moleculară. În timp ce gazelor din teoria clasică li se aplică statistica Maxwell-Boltzmann, electronilor liberi din metale li se aplică statistica cuantică Fermi-Dirac, cum de altfel s-a mai spus.

Deși noua teorie cuantică ajunge la aceeași expresie a conductivității electrice,

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m},$$

trebuie făcute cîteva precizări. Mai întîi timpul τ se înlocuiește cu timpul de relaxare, definit ca raportul dintre distanța medie dintre nodurile rețelei cristaline și viteza termică medie a electronilor în absența cîmpului electric. În același timp, datorită ipotezei de care se folosește această teorie, anume că funcția de distribuție a electronilor din metal variază ca urmare a ciocnirilor elastice dintre electroni și defectele rețelei sau cu ionii din noduri, transportul de electroni prin metal apare ca un fenomen de propagare a undelor electronice.

Într-adevăr, prin simpla distribuție de echilibru a electronilor dintr-un metal, nu are loc transportul sarcinilor electrice. Acest lucru se întîmplă numai cînd este aplicat un cîmp electric extern, care modifică modul ocupării de către electroni a stărilor permise. Așadar, responsabili de proprietățile electrice ale metalelor sînt în cea mai mare parte electronii de conducție, adică chiar electronii de valență. Acești electroni ocupă la 0K banda de conducție, pînă la nivelul Fermi, care la metale, se află în interiorul unei benzi permise.

S-a arătat că atît în cazul teoriei electronilor liberi, cît și al benzilor de energie, energia electronului este funcție continuă de numărul de undă K,

$$W = \frac{\hbar^2K^2}{2m}, \qquad (7.41)$$

și că fiecărei valori $\hbar K$ îi este asociată o stare definită de $\Psi = \exp(i\vec{K}\cdot\vec{r})$. Dar, această ultimă ipoteză înseamnă

de fapt că deplasarea electronilor trebuie privită ca deplasarea unui pachet de unde, avînd viteza de grup v_g.

Să considerăm, de exemplu, că starea ocupată K_1 are energia W_1 (fig. 7.28); cum pentru orice undă avînd frecvența unghiulară ω, se poate scrie $v_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}K$ și $W = \hbar\omega$, rezultă pentru viteza de grup expresia

$$v_g = \frac{1}{\hbar}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}K} \qquad (7.42)$$

După un interval de timp δt de la aplicarea cîmpului electric E, electronii vor fi accelerați spre starea K_2, ce are energia W_2. Întrucît creșterea energiei cinetice $\delta W = W_2 - W_1$ este egală cu scăderea energiei potențiale electrostatice, avem

$$\delta W = eEv_g \cdot \delta t = \frac{eE}{\hbar}\cdot\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}K}\cdot\delta t,$$

astfel încît la limită

$$\hbar\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = eE. \qquad (7.43)$$

Relația (7.43) este ecuația de mișcare pentru electronii din bandă, ecuația nefiind legată de vreo relație particulară dintre energie și vectorul de undă. Totuși pentru cîmpuri electrice foarte intense, mai mari decît cele atinse în metale, relația (7.43) nu mai este valabilă. Un asemenea efect este important la semiconductori și izolatori.

Din relația (7.41), care leagă energia benzilor de energie a electronilor liberi cu numărul de undă, se observă că $v_g = \hbar K/m$ și deci ecuația (7.43) se poate pune sub forma

$$mv_g = eE,$$

relație care arată încă o dată că forțele ce acționează asupra electronului liber, aflat în banda de energie, sînt aceleași, ca și în cazul clasic, cu precizările despre care am vorbit mai înainte.

În cazul unei distribuții complete de stări ocupate, ecuația (7.43) arată că pentru un cîmp electric constant, fiecare stare se deplasează în spațiul $\vec{K}$ cu aceeași viteză, astfel că întreaga distribuție se deplasează cu viteza de drift prin spațiul $\vec{K}$, fără să-și schimbe forma. Legat de aceasta, se constată că ecuația (7.43) reprezintă de fapt

legea de deplasare a sferei Fermi în spațiul $\vec{K}$. Dacă se integrează ecuația respectivă, se obține

$$K(t) - K(0) = \Delta K = \frac{eE}{\hbar} t,$$

relație ce arată că sfera Fermi s-a deplasat cu distanța ΔK în spațiul $\vec{K}$ (fig. 7.29). La momentul $t = 0$, sfera ocupă poziția I și la $t = \tau$ (timpul de relaxare), sfera ocupă poziția II.

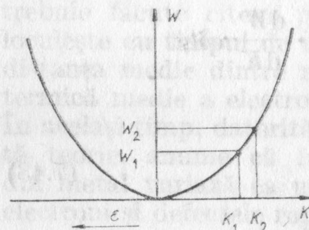


Fig. 7.28.

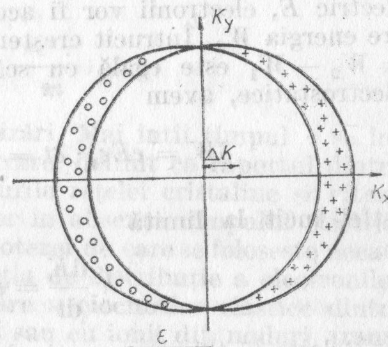


Fig. 7.29.

Pînă acum nu am explicat constanța curentului electric pentru un cîmp dat sau permis și nici nu am luat în considerare revenirea la echilibru după înlăturarea cîmpului. Să observăm mai întîi din legea lui Ohm, fapt constatat și experimental, că pentru un cîmp electric constant, densitatea de curent rămîne și ea constantă. Dar acest lucru implică faptul că electronii în urma ciocnirilor cu particulele din nodurile rețelei cristaline sînt frînați în mișcarea lor prin metal.

Ca urmare a deplasării sferei Fermi, în locul poziției I rămîn libere nivele enrgetice care pot fi ocupate prin salturi cuantice de electronii care ocupă zona a doua. Rezultă că în urma ciocnirilor elastice a electronilor cu ionii rețelei cristaline, are loc o depopulare continuă de electroni a nivelelor începînd de la marginea zonei II și repopularea cu electronii zonei I.

Valoarea deplasării sferei Fermi, deci a distribuției de electroni, ținînd seama de expresia conductivității electrice, permite obținerea unor informații privind timpul de relaxare și legătura cu alți parametri. Legat de aceasta, teoria arată și se confirmă practic că unor densități normale de curent j le corespund deplasări mici ale distribuțiilor de stări. În cazul cuprului, la care densitatea de electroni este de aproximativ 10^{29} electroni/m^3, se poate ajunge la o densitate de curent de aproximativ 10^6 A/m^2 și la o viteză de drift $u_g \simeq 10^{-4}$ m/s, în timp ce viteza Fermi este de aproximativ 10^6 m/s. Deplasarea corespunzătoare în spațiul $\vec{K}$ este în jur de 10 m^{-1}, în timp ce K_{max} este 10^{10} m^{-1}.

Întrucît rezistivitatea cuprului la temperatura camerei este 1.7×10^{-8} Ωm, rezultă pentru timpul de relaxare valoarea 10^{-13} s. Acest timp pare scurt, dar este suficient de mare pentru ca un electron să străbată aproximativ 10^{-7} cm între ciocniri, considerate că au loc pe distanțe egale cu cîteva sute de perioade ale rețelei cristaline.

Prin răcirea metalului la temperatura heliului lichid, cînd mișcarea termică a ionilor rețelei este eliminată și este asigurată o purificare suficient de ridicată, se pot obține rezistivități de ordinul 10^{-13} Ω · m, care corespund unui drum liber mediu dintre ciocniri de aproximativ un centimetru, adică circa 10^8 perioade ale rețelei cristaline. Acest rezultat este foarte important pentru descrierea mișcării electronilor în solide, deoarece este esențial ca pachetul de unde să se propage pe distanțe mari, egale cu un număr mai mare de lungimi de undă, înainte de a fi împrăștiat ca urmare a ciocnirilor cu nodurile rețelei cristaline.

Semiconductorii, așa cum s-a spus mai sus, reprezintă o clasă specială de solide, care au conductivitatea electrică cuprinsă între cea a metalelor și cea a izolatorilor. În figura 7.30 este dată o schemă de clasificare a solidelor în funcție de valoarea rezistivității, respectiv a conducti-

Conductori | Semiconductori | Izolatori

Siliciu

Cupru Germaniu Sticlă Mică

10^8 10^6 10^4 10^2 1 10^{-2} 10^{-4} 10^{-6} 10^{-8} 10^{-10} 10^{-12} 10^{-14} Conductivitate σ (Ω^{-1})

10^{-8} 10^{-6} 10^{-4} 10^{-2} 1 10^2 10^4 10^6 10^8 10^{10} 10^{12} 10^{14} Rezistivitate ρ (Ω m)

Fig. 7.30.

vităţii, din care se constată că semiconductorii prezintă şi ei o gamă suficient de largă a conductivităţii, cuprinsă între 10^{-5} — $10^{3}\ \Omega^{-1}\cdot m^{-1}$.

Proprietăţile electrice ale semiconductorilor sînt determinate, în principal, de două cauze: a) existenţa benzilor energetice interzise, de mică valoare şi b) prezenţa impurităţilor. Semiconductorul pur, care nu prezintă deci impurităţi, se numeşte semiconductor intrinsec şi la 0 K este un izolator perfect, deci banda de conducţie este complet neocupată şi banda de valenţă este complet ocupată. La o temperatură finită, electronii aflaţi pe nivelul superior al benzii de valenţă pot fi excitaţi termic şi ca urmare a benzii interzise mici, trec în banda de conducţie. În locul electronilor, în banda de valenţă sînt create goluri. Deci, electronii în banda de conducţie şi golurile în banda de valenţă formează cele două tipuri de purtători de electricitate în semiconductorul intrinsec.

Cele două tipuri de purtători, unul pozitiv (golurile) şi altul negativ (electronii), pot exista simultan într-un cristal şi comportarea lor independentă determină o serie de proprietăţi interesante ale semiconductorilor. Rezultă că este posibil să fie modificată conductivitatea unui semiconductor schimbînd concentraţiile electronilor sau ale golurilor, astfel încît semiconductorul în totalitate să rămînă neutru din punct de vedere electric.

Dacă unui semiconductor intrinsec, aflat la o temperatură mai mare de 0 K i se aplică un cîmp electric, în semiconductor apare un curent electric datorat deplasării golurilor în banda de valenţă şi electronilor în banda de conducţie, în acelaşi sens. Mai exact, electronii ajunşi din banda de valenţă în banda de conducţie au o mişcare în sensul contrar cîmpului electric, iar locurile rămase libere în banda de valenţă sînt ocupate de alţi electroni din banda de valenţă. Aceştia, la rîndul lor, lasă libere alte locuri libere, cu surplus de sarcină pozitivă, astfel că golurile se deplasează în sens opus electronilor din banda de valenţă, adică în acelaşi sens cu electronii din banda de conducţie.

Golurile trebuie privite ca un concept fizic, în sensul că ele sînt doar nişte particule fictive. Ele diferă esenţial de electroni prin aceea că în timp ce electronii sînt o realitate obiectivă, golurile reprezintă un mod de reprezentare, descriind comportarea electronului în banda de valenţă dintr-un cristal.

Mişcarea golurilor şi a electronilor poate fi descrisă cu ajutorul legilor de mişcare a particulelor libere în vid, luînd în considerare pentru fiecare particulă aşa-numita masă efectivă, m_n^*, pentru electroni, şi m_p^*, pentru goluri. Masa efectivă se deosebeşte de masa reală, în sensul că în ea este inclusă acţiunea reţelei cristaline asupra mişcării purtătorilor de electricitate. Masa efectivă poate fi pozitivă sau negativă, în funcţie de tipul purtătorului de sarcină. Ea este în general mai mică decît masa de repaus; de exemplu, în cristalul de germaniu, $m_n^* = 0{,}082\ m_e$, iar $m_p^* = 0{,}3\ m_e$, unde m_e este masa de repaus a electronului liber.

Din cauza maselor efective diferite a celor două tipuri de purtători, vor fi diferite şi vitezele de drift în cîmp electric. În acest fel, densitatea de curent se scrie

$$\vec{j} = (ne\mu_n + pe\mu_p)\vec{E},$$

iar conductivitatea electrică

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p) \qquad (7.44)$$

unde n şi p sînt concentraţiile (densităţile) de electroni, respectiv de goluri, μ_n şi μ_p sînt mobilităţile corespunzătoare, iar e este sarcina electronului, egală în valoare absolută cu a golului.

Într-un semiconductor intrinsec, concentraţia golurilor este egală cu concentraţia electronilor, deoarece fiecare electron excitat şi ajuns în banda de conducţie creează un gol în banda de valenţă. Numărul n depinde de temperatură, de lărgimea benzii interzise, de densitatea stărilor şi de poziţia nivelului Fermi. La semiconductorul intrinsec, nivelul Fermi se află exact la mijlocul benzii interzise, la egală distanţă între banda de valenţă şi banda de conducţie. Formula pentru concentraţia purtătorilor de sarcină este

$$n = 2\left(\frac{2\pi m^* kT}{h^2}\right)^{3/2} \exp -\left(\frac{W_g}{2kT}\right), \qquad (7.45)$$

unde W_g este lărgimea benzii interzise.

Prezenţa benzii interzise cere ca purtătorii să fie activaţi termic şi, din relaţia (7.45), se vede că concentraţia purtătorilor de sarcină dintr-un semiconductor intrinsec creşte exponenţial cu temperatura şi scade exponenţial cu lărgimea benzii interzise.

Conform relației (7.44), aceeași comportare o are și conductivitatea σ a semiconductorilor, în contrast cu comportarea metalelor. Exact ca și la metale, difuzia pe rețeaua cristalină are un efect important asupra mișcării purtătorilor și, din acest motiv, mobilitatea depinde de temperatură conform relației

$$\mu = CT^{-(3/2)} \quad (C = \text{const}).$$

În realitate, nu există semiconductor intrinsec pur, întrucît toate cristalele, dacă nu au impurități introduse din exterior, prezintă oricum defecte ale rețelei cristaline, care, modificînd structura energetică de bandă, se comportă ca niște impurități. Se convine să se considere totuși că un semiconductor este intrinsec, dacă concentrația purtătorilor datorită impurităților este neglijabilă, în comparație cu concentrația purtătorilor datorată activării termice.

Semiconductorii cu impurități se numesc extrinseci. Impuritățile sînt introduse prin substituirea unor atomi din cristal prin fenomene de difuzie sau în timpul creșterii artificiale a cristalelor. În general, atomii de impuritate diferă de atomii „gazdă" prin faptul că au valența mai mare sau mai mică cu o unitate, astfel că ei au un electron mai mult sau mai puțin, care participă la realizarea legăturii covalente. De exemplu, atomii de impuritate de As sînt pentavalenți, în timp ce atomii gazdă de Ge sînt tetravalenți, astfel că patru electroni ai As participă la realizarea legăturii covalente cu patru atomi vecini de Ge.

Cel de al cincilea electron al atomului de As rămînînd liber, este slab legat de acesta, ceea ce face ca nivelele energetice ale electronului respectiv să se situeze în banda interzisă a Ge, imediat sub banda sa de conducție. În acest fel, este necesară o energie de activare foarte mică, fiind suficientă temperatura camerei pentru ca atomul de impuritate să fie ionizat și deci să conducă la apariția electronilor în banda de conducție a elementului de bază.

În figura 7.31, a este arătată structura de bandă la 0 K a semiconductorului cu impurități la care nivelul energetic al electronilor liberi se află imediat sub banda de conducție. Un astfel de semiconductor se numește semiconductor de tip n, deoarece la temperaturi $T > 0$ K, electronii liberi, aflați pe nivelul lor energetic, trec ușor în banda de conducție, devenind electroni de conducție. Nivelul pe care s-au aflat electronii care au ajuns în banda de conducție se numește nivel donor (fig. 7.31, b), iar impuritățile care generează asemenea electroni se numesc impurități donoare.

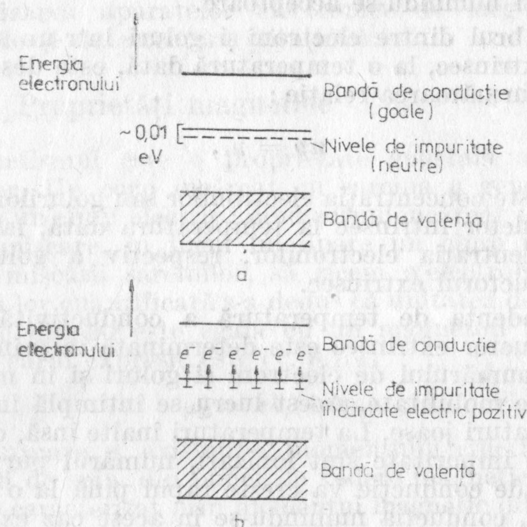


Fig. 7.31.

Să considerăm cazul în care atomul de impuritate are un electron mai puțin decît atomul elementului de bază. În figura 7.32, a este arătată situația în care semiconductorul se află la 0 K. Argumente asemănătoare celor de mai sus arată că nivelul adițional creat va fi în banda interzisă, în imediata vecinătate a benzii de valență a elementului de bază. Astfel de nivele pot fi ionizate prin captarea de electroni din banda de valență, creînd în aceasta goluri (fig. 7.32, b). Un astfel de semiconductor,

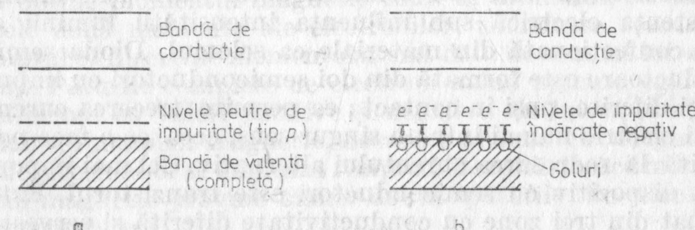


Fig. 7.32.

la care atomul de impuritate are un electron în minus față de elementul de bază, este un semiconductor de tip p; ca exemplu, avem semiconductorul care conține atomi de In ca impurități, iar Ge ca element de bază, astfel de impurități numindu-se acceptoare.

Echilibrul dintre electroni și goluri într-un semiconductor extrinsec, la o temperatură dată, este descris statistic de următoarea relație:

$$np = n_i^2,$$

unde n_i este concentrația electronilor sau golurilor într-un semiconductor intrinsec la temperatura dată, iar n și p sînt concentrația electronilor, respectiv a golurilor în semiconductorul extrinsec.

Dependența de temperatură a conductivității unui semiconductor extrinsec este determinată în principal de variația numărului de electroni și goluri și în mai mică măsură de mobilitate. Acest lucru se întîmplă în special la temperaturi joase. La temperaturi înalte însă, cînd toți atomii de impuritate sînt ionizați, numărul purtătorilor în banda de conducție va crește rapid pînă la o valoare constantă, conducția numindu-se în acest caz extrinsecă totală și corespunde domeniului de folosire normală a dispozitivelor semiconductoare. Dacă temperatura semiconductorului crește în continuare, are loc ionizarea rețelei de bază și electronii vor trece direct din banda de valență în banda de conducție, conducția numindu-se în acest caz conducție intrinsecă sau proprie.

Mai amintim doar că datorită diferitelor proprietăți pe care le au, semiconductorii au căpătat o largă utilizare. Ca urmare a variației conductivității semiconductorilor cu temperatura, s-a construit termistorul — un semiconductor a cărui rezistență electrică depinde de temperatură. Fotorezistența este un semiconductor care își variază rezistența electrică sub influența intensității luminii și este confecționată din materiale ca seleniul. Dioda semiconductoare este formată din doi semiconductori cu impurități diferite, puși în contact; ea permite trecerea curentului electric numai într-un singur sens, ceea ce o face potrivită la redresarea curentului alternativ. Cel mai important dispozitiv cu semiconductori este tranzistorul. Este format din trei zone cu conductivitate diferită și servește la amplificarea semnalelor electrice.

Avantajele deosebite ale dispozitivelor cu semiconductori: dimensiuni mici, putere mică de alimentare, eliminarea timpului de încălzire prealabilă, durată mare de funcționare etc., au făcut ca acestea să înlocuiască în cea mai mare măsură tuburile electronice, conducînd la miniaturizarea aparatelor electronice de larg consum, industriale și de cercetare științifică.

7.6.4. Proprietăți magnetice

Magnetismul este o proprietate generală a tuturor corpurilor. Un corp încărcat cu sarcina q generează în jurul său un cîmp electric; cînd corpul încărcat electric se află în mișcare, în jurul lui apare un cîmp magnetic, datorat mișcării sarcinilor, să zicem, a electronilor. Din mișcarea lor cuantificată s-a dedus că unitatea de moment magnetic dipolar este egală cu un magneton Procopiu-Bohr, a cărui expresie este (v. 6.1.4)

$$\mu_B = eh/(4\pi m_0).$$

Ca urmare a existenței momentului cinetic orbital și a celui de spin, din punct de vedere magnetic, electronul este caracterizat prin momentul magnetic orbital,

$$\mu_l = m_l[eh/(4\pi m_0)],$$

și momentul magnetic de spin,

$$\mu_s = gm_s[eh/(4\pi m_0)],$$

unde m_l și m_s sînt numerele cuantice corespunzătoare celor două tipuri de mișcări ale electronului, iar g este factorul de multiplicare Landé, egal exact cu doi și arată că raportul dintre momentul magnetic și momentul cinetic corespunzător mișcării de spin este de două ori mai mare decît același raport corespunzător mișcării orbitale. Pentru a obține momentul magnetic total al atomului, se adună cele două momente ale electronilor, ținîndu-se seama de faptul că direcțiile momentelor sînt date de semnul lui m_l și m_s. Păturile complete de electroni avînd numere egale de electroni cu valori pozitive și negative ale lui m_l și m_s nu dau un moment magnetic, deoarece momentele magnetice ale electronilor se anulează reciproc. Rezultă deci că momentul magnetic provine numai de la păturile de electroni incomplete.

Modul în care fiecare corp interacţionează cu cîmpul magnetic este descris de vectorul intensitate de magnetizare (magnetizaţie) $\vec{M}$, definit ca momentul magnetic raportat la volum,

$$\vec{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \vec{\mu}_k}{\mathrm{d}V}; \quad [\vec{M}]\mathrm{SI} = \mathrm{A/m},$$

unde $\vec{\mu}_k$ sînt momentele magnetice atomice create de fiecare curent microscopic, iar $\Sigma\vec{\mu}_k$ este suma acestor momente magnetice din elementul de volum $\mathrm{d}V$ (fig. 7.33).

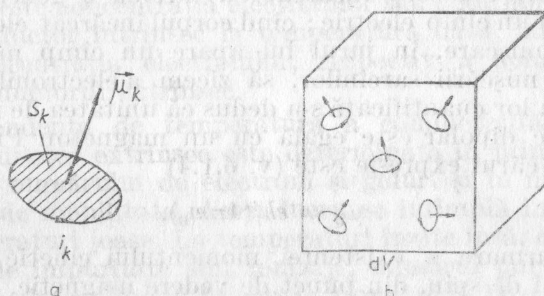


Fig. 7.33.

Între inducţia magnetică $\vec{B}$ şi cîmpul magnetic $\vec{H}$ ce acţionează în vid există relaţia

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H},$$

unde μ_0 este permeabilitatea magnetică a vidului.

Cînd o substanţă magnetică se află într-un cîmp magnetic $\vec{H}$ cu magnetizaţia $\vec{M}$, inducţia magnetică $\vec{B}$ va fi în acest caz

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0\mu_r\vec{H},$$

unde μ_r este permeabilitatea relativă a substanţei. De aici, se obţine

$$\mu_r = 1 + \frac{\vec{M}}{\vec{H}} = 1 + \varkappa,$$

unde $\varkappa$ este susceptivitatea magnetică a substanţei. În vid, $\vec{M} = 0$ şi $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$. În consecinţă vidul are $\mu_0 = 1$, iar $\varkappa = 0$.

În funcţie de semnul şi de valoarea susceptivităţii magnetice $\varkappa$, de valoarea permeabilităţii relative, precum

şi de dependenţa magnetizării de cîmpul magnetic, substanţele se clasifică în: diamagnetice, paramagnetice, feromagnetice, antiferomagnetice şi ferimagnetice. În tabelul 7.2 sînt schiţate principalele caracteristici ale fiecărei

Tabelul 7.2

Clasa	Mărimea susceptivităţii	Dependenţa de temperatură a lui $\varkappa$	Exemple
Diamagnetice	mică şi negativă $\sim -10^{-6}$	independentă	Atomi ai unor solide ce posedă pături închise şi metale ca: Au, Cu, Ag, Cd
Paramagnetice	mică şi pozitivă $\sim 10^{-6}$	legea Curie, $\varkappa = C/T$ sau legea Curie-Weiss, $\varkappa = C/(T - \theta)$	Atomi cu numere impare de electroni
	mică şi pozitivă	independentă	Paramagnetismul lui Pauli, datorat electronilor de conducţie din metale
Feromagnetice	foarte mare şi pozitivă	$(\varkappa \to \infty)$	Fe, Co, Ni, Gd
Antiferomagnetice	mică şi pozitivă	$\varkappa$ scade cu temperatura	săruri şi oxizi ale metalelor de tranziţie, NiO, MnF_2 α-crom
Ferimagnetice	mare şi pozitivă	$(\varkappa \to \infty)$	Ferite, Fe_3O_4

clase amintite de substanţe, iar în figura 7.34 este arătat modul cum variază magnetizarea $\vec{M}$, cu cîmpul magnetic $\vec{H}$ aplicat.

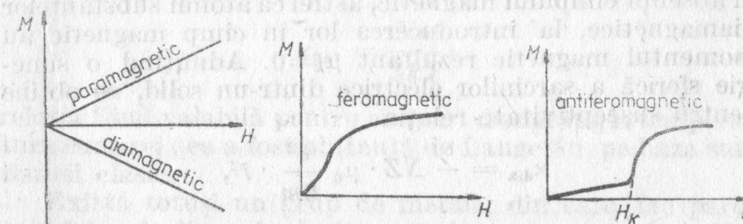


Fig. 7.34.

Diamagnetismul este o proprietate generală a tuturor substanţelor şi constă în inducerea de către un cîmp magnetic exterior a unor curenţi elementari în învelişurile electronice ale atomilor. Momentelor magnetice induse sînt atît de mici, încît efectele lor sînt adesea mascate de alte forme de magnetism, cum se întîmplă la solide.

Fără a intra în detalii, folosind teoria microscopic-clasică, să arătăm de cine depinde susceptivitatea magnetică la substanţele diamagnetice. În acest scop, să considerăm un electron în mişcare în jurul unui nucleu cu sarcina $+e$, pe o orbită de rază r cu viteza unghiulară ω, în absenţa cîmpului magnetic (fig. 7.35). Momentul magnetic μ asociat mişcării electronului este $\mu = i \cdot S = (-\omega e/2\pi) \cdot \pi r^2$.

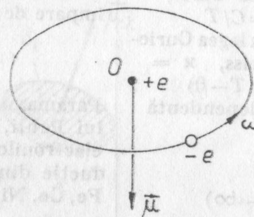


Fig. 7.35.

Prin aplicarea unui cîmp magnetic exterior, de inducţie B, are loc o variaţie a fluxului magnetic prin aria orbitei şi, conform legii lui Lenz, ia naştere un cîmp electric care se opune acestei variaţii. Acest lucru este valabil numai atunci cînd inducţia magnetică variază de la zero pînă la valoarea maximă B. Cîmpul electric afectează mişcarea electronului prin exercitarea unei forţe care modifică frecvenţa unghiulară cu o valoare ω_L numită frecvenţă Larmor: $\omega_L = eB/(2m)$, unde m este masa electronului. Momentul magnetic indus în acest fel este egal şi de sens contrar momentului magnetic μ al electronului pe orbită în absenţa cîmpului magnetic, astfel că atomii substanţelor diamagnetice, la introducerea lor în cîmp magnetic au momentul magnetic rezultant $\mu_k = 0$. Admiţînd o simetrie sferică a sarcinilor electrice dintr-un solid, se obţine pentru susceptivitate relaţia

$$\varkappa_{\text{dia}} = - NZ\mu_0 \frac{e^2}{6m} \cdot \bar{r}^2,$$

unde $\bar{r}^2$ este media pătratului distanţei electronilor faţă de nuclee. Se observă că la dielectrici $\varkappa_{\text{dia}}$ nu depinde de

temperatură şi nici de intensitatea cîmpului magnetic aplicat.

Paramagnetismul este o proprietate a unor anumite substanţe a căror molecule, atomi sau ioni au un moment magnetic permanent. Un cîmp extern de inducţie $\vec{B}$ determină o aliniere a acestor momente magnetice pe direcţia şi sensul cîmpului. Datorită agitaţiei termice, echilibrul termodinamic la temperatura T constă numai dintr-o aliniere parţială.

La unele substanţe paramagnetice, numite normale (de exemplu, Pt, Pd etc.) susceptivitatea magnetică $\varkappa$ variază invers proporţional cu temperatura, conform legii lui Curie,

$$\varkappa = \frac{C}{T} \quad (C = \text{constanta Curie}),$$

în timp ce la alte substanţe, variaţia este dată de legea lui Curie-Weiss,

$$\varkappa = \frac{C}{T - T_C} \quad (T_C = \text{temperatura Curie}).$$

Magnetizarea M a unui solid paramagnetic în cîmpul magnetic H la temperatura T are următoarea expresie, dată de Langevin,

$$M = N\left(\text{ctgh}\,\frac{\mu H}{kT} - \frac{kT}{\mu H}\right),$$

unde N este numărul de atomi din unitatea de volum, iar μ este momentul magnetic al atomului paramagnetic.

Cînd $\mu H/kT \ll 1$, expresia din paranteză se simplifică, astfel încît ea devine $\mu H/(3kT)$, ceea ce înseamnă că constanta Curie este de forma: $C = N\mu^2/(3k)$ şi deci susceptivitatea magnetică va fi

$$\varkappa_{\text{par}} = \frac{N\mu^2}{3kT},$$

relaţia fiind valabilă pentru cîmpuri moderate, la temperatura camerei; ea a fost obţinută de Langevin, pe baza statisticii clasice.

Există totuşi un grup de metale, din care fac parte metalele alcaline şi alcalino-pămîntoase, care deşi sînt paramagnetice, susceptivitatea lor magnetică este inde-

pendentă de temperatură. Independenţa paramagnetismului de temperatură se poate explica pe baza statisticii cuantice, fenomenul datorindu-se spinilor electronilor liberi din metalele respective. Este aşa-numitul paramagnetism Pauli.

Pentru a explica acest tip de paramagnetism, să reconsiderăm teoria electronilor liberi dintr-un cristal de metal paramagnetic. În primă aproximaţie, teoria electronilor liberi poate fi considerată ca o teorie rudimentară a benzii de energie, în care electronii de valenţă ocupă două benzi, una conţinînd electronii cu $m_s = +\frac{1}{2}$ şi alta cu $m_s = -\frac{1}{2}$. În absenţa cimpului magnetic, cele două benzi parabolice au forma din figura 7.36, a, energia unui electron în ambele benzi fiind W. Considerînd, de exemplu, un cristal monovalent format din N atomi, cei N electroni de valenţă vor ocupa $N/2$ nivele energetice, adică vor fi ocupate toate nivelele aflate de la nivelul Fermi în jos. Pe fiecare nivel vor exista cite doi electroni cu spinii de sens contrar, astfel încît momentul magnetic rezultant de spin va fi nul.

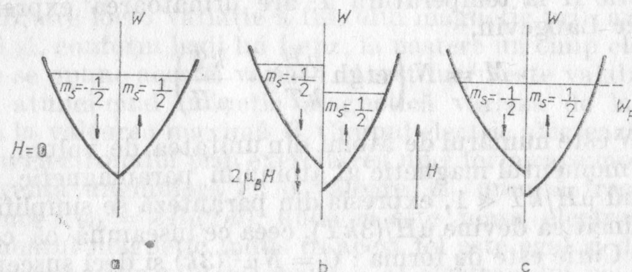


Fig. 7.36.

Prin aplicarea unui cîmp magnetic $\vec{H}$, cele două benzi se deplasează una faţă de alta, astfel că spinii electronilor cu $m_s = -\frac{1}{2}$ se vor orienta în sens contrar cimpului, iar spinii electronilor cu $m_s = +\frac{1}{2}$ se vor orienta în acelaşi sens cu $\vec{H}$. În prezenţa cîmpului magnetic, fiecare electron primind energia suplimentară $\mu_B H$, rezultă că electronii cu spinii paraleli cu cîmpul aplicat, au energia corespunzătoare limitei Fermi egală cu $W_F - \mu_B H$, în timp ce electronii cu spinii antiparaleli cu cîmpul au energia $W_F + \mu_B H$. Or, aceasta înseamnă că diferenţa dintre energiile a doi electroni de pe acelaşi nivel energetic este $2\mu_B H$ şi că de fapt cele două benzi energetice sînt deplasate una faţă de alta cu $2\mu_B H$ (fig. 7.36, b). Această situaţie necorespunzînd unui minim al energiei sistemului, înseamnă că o parte dintre electronii cu spinul antiparalel cu cîmpul trec în banda a doua pînă la egalarea nivelelor Fermi în cele două benzi, astfel încît la un moment dat numărul electronilor cu spin paralel este mai mare în banda din dreapta faţă de cea din stînga (fig. 7.40, c). Excesul de electroni cu spinul orientat paralel cu cîmpul magnetic faţă de electronii avînd spinul orientat antiparalel, determină o magnetizare totală,

$$M = N\mu_B^2 H/kT_F,$$

şi o susceptivitate magnetică

$$\varkappa_{para} = \frac{M}{H} = N\frac{\mu_B^2}{kT_F},$$

unde T_F este temperatura Fermi. Această expresie, dedusă din considerentele teoriei cuantice arată că susceptivitatea paramagnetică la unele substanţe este independentă de temperatură (T_F nefiind funcţie de temperatura T).

Cele două tipuri de magnetism, dia- şi paramagnetismul nu prezintă fenomenul de ordonare magnetică, în sensul că substanţele ce prezintă asemenea forme de magnetism, în absenţa unui cîmp exterior, fie că nu au momente magnetice (diamagneticele), fie au momentele magnetice orientate la întîmplare (paramagneticele) — fenomenul fiind observabil începînd chiar de la temperatura camerei, pentru unele substanţe.

Feromagnetismul este o proprietate comună unui grup special de substanţe, cum sînt Fe, Ni, Co precum şi aliajele lor sau aliajul de tip Heusler (Mn — Cu — Al) etc. Substanţele feromagnetice au mai multe proprietăţi caracteristice : chiar în absenţa cîmpului magnetic prezintă fenomenul de ordonare magnetică, adică au o magnetizaţie permanentă, deci un moment magnetic, care dispare peste o anumită temperatură caracteristică, numită tem-

peratură Curie, T_C, cînd feromagneticul se transformă în paramagnetic; au permeabilitatea relativă foarte mare în comparație cu cele diamagnetice și paramagnetice și dependentă de cîmpul aplicat; susceptivitatea lor magnetică este pozitivă și are valori foarte mari pentru $T < T_C$; pentru temperaturi $T > T_C$, susceptivitatea variază cu temperatura după legea: $\varkappa = C/(T - T_C)$. În figura 7.37 este arătată această dependență pentru paramagnetice și feromagnetice.

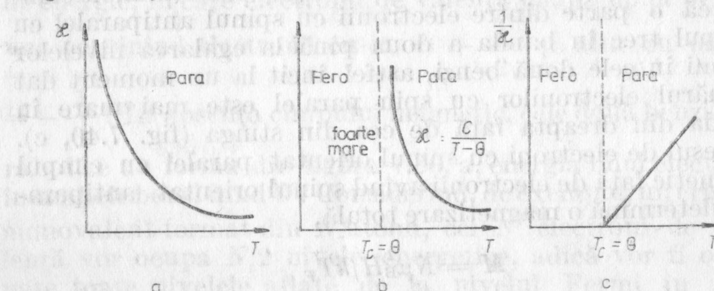


Fig. 7.37

O primă încercare de a explica feromagnetismul a fost făcută de Weiss, care postulează faptul că la substanțele feromagnetice, pe lîngă cîmpul aplicat, care conduce la orientarea momentelor magnetice proprii, mai există o altă acțiune de orientare, echivalentă cu un cîmp magnetic, numită cîmp intern sau cîmp molecular. Acest cîmp intern fiind proporțional cu magnetizarea, $\vec{H}_w = \lambda \vec{M}$ (λ — constanta cîmpului lui Weiss) — ar determina, conform lui Weiss, magnetizarea spontană a feromagneticului, deci alinierea momentelor magnetice din substanță.

Apariția momentului magnetic în timpul magnetizării a fost pusă în evidență în experiența lui Einstein-de Haas. În acest experiment, un mic cilindru din fier, suspendat printr-un fir elastic, se află în interiorul unui solenoid (fig. 7.38). Sensul de rotație a cilindrului se schimbă o dată cu schimbarea sensului curentului, deci a magnetizării.

În 1928, Heisenberg a presupus că forțele care sînt responsabile de orientarea momentelor magnetice atomice sînt forțe tipic cuantice. Mai exact, feromagnetismul se poate explica cuantic pe seama interacțiunii de schimb dintre electronii din păturile profunde și incomplete, electroni ce au momentele de spin orientate paralel.

În mod normal, spinii electronici din atom se compensează cîte doi și deci feromagnetici pot fi numai acele materiale ai căror atomi au spinii necompensați.

La fier, de exemplu, pe pătura K sînt doi electroni cu spinii opuși, pe pătura L vor fi 8 electroni cu spinii opuși doi cîte doi, în timp ce pe pătura M, din cei 14 electroni, 10 au spinii compensați, iar 4 electroni cu spinii orientați în același sens și necompensați și care se află în așa numita subgrupă d. Pe pătura următoare N sînt doi electroni cu spinii compensați.

La formarea cristalului de fier, între electronii vecini ai atomului apar forțe speciale care orientează paralel momentele magnetice de spin. Acestea se numesc forțe de schimb și sînt asemănătoare forțelor care leagă atomii de hidrogen într-o moleculă. Interacțiunea de schimb, care dă naștere la un efect de suprapunere parțială a norilor de electroni a doi atomi vecini (fig. 7.39), determină o schimbare în energia sistemului cu un termen

$$W_s = -2J\vec{s}_A \cdot \vec{s}_B,$$

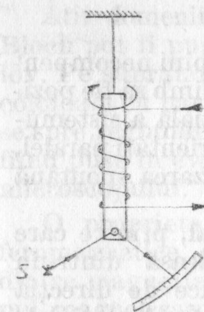


Fig. 7.38.

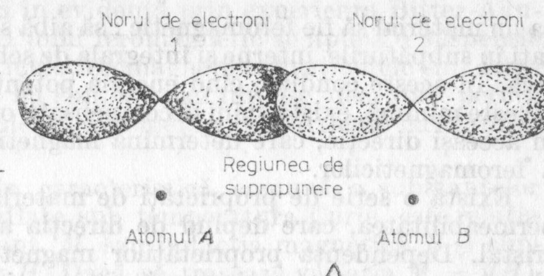


Fig. 7.39.

unde J este așa-numita integrală de schimb, care este o măsură a probabilității ca cei doi nori de electroni să se suprapună chiar parțial, iar $\vec{s}_A$ și $\vec{s}_B$ sînt spinii asociați electronilor celor doi atomi vecini care interacționează.

Situația favorabilă corespunde cazului cînd sistemul are energia cea mai mică, adică negativă și deci $J > 0$, caz în care spinii $\vec{s}_A$, $\vec{s}_B$ ai electronilor care formează legătura de schimb sînt paraleli.

S-a găsit chiar o regulă simplă care definește posibilitatea ca un material să fie feromagnetic: raportul dintre

parametrul rețelei cristaline și diametrul $2R$ al subpăturii $3d$ pe care se găsesc electronii cu spini necompensați, trebuie să fie egal sau mai mare decît 1,5, adică

$$\frac{d}{2R} \geqslant 1{,}5.$$

Din figura 7.40, în care este reprezentată dependența integralei de schimb de raportul $d/2R$ pentru atomii metalelor de tranziție din grupa fierului, se observă că $J > 0$ numai pentru Fe, Co, Ni, Gd, în timp ce pentru Mn, Cr integrala de schimb este negativă. Așadar, există două condiți

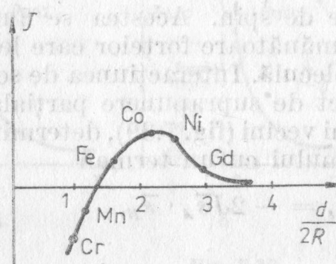


Fig. 7.40.

ca un material să fie feromagnetic : să aibă spini necompensați în subpăturile interne și integrala de schimb să fie pozitivă. În aceste condiții, cînd energia potențială a sistemului este minimă, există spini necompensați, orientați paralel, în aceeași direcție, care determină magnetizarea spontană a feromagneticilor.

Există o serie de proprietăți de material, printre care permeabilitatea, care depind de direcția aleasă dintr-un cristal. Dependența proprietăților magnetice de direcția aleasă se numește anizotropie magnetică. Materialele magnetice policristaline care se folosesc în tehnică sînt formate dintr-un număr mare de cristale ale căror axe sînt orientate în toate direcțiile. Aceste materiale sînt izotrope, iar proprietățile lor sînt aceleași în toate direcțiile. Atunci cînd materialele policristaline sînt supuse unor prelucrări termomecanice, ele pot deveni anizotrope. De exemplu, în cazul laminării tablelor confecționate din materiale feromagnetice, axele cristalelor se dispun în deosebi pe direcția de laminare, materialul prezentînd o așa-numită textură cristalografică, devenind anizotrop.

Pentru a putea explica și situații în care un corp feromagnetic nu este magnetizat în lipsa cîmpului aplicat, deși

se află la temperaturi $T < T_C$, Weiss a emis o ipoteză suplimentară, conform căreia corpurile feromagnetice reale sînt formate din domenii microscopice, în interiorul cărora magnetizația este egală cu magnetizația de saturație. Lipsa unei magnetizări macroscopice într-un feromagnet demagnetizat, dovedește că în acest caz direcțiile și sensurile de magnetizare ale domeniilor variază de la un domeniu la altul, astfel încît pe întreg feromagneticul se anulează reciproc (fig. 7.41).

Conform teoriei lui Weiss, prin aplicarea unui cîmp magnetic exterior, domeniile favorabil orientate își măresc volumul pe seama celor orientate nefavorabil, pînă cînd corpul devine un singur domeniu, iar în cîmpuri suficient de puternice au loc procese rotaționale ale magnetizației domeniilor, în direcția și sensul cîmpului aplicat.

Trecerea de la un domeniu la altul nu se face brusc, ci printr-o regiune numită perete Bloch, după numele celui ce s-a ocupat primul cu acest subiect. În pereții de trecere de la un domeniu la altul, se produc variații importante de magnetizare, deci la cîmpuri intense în regiunile respective.

Atît domeniile de magnetizare spontană, cît și pereții Bloch pot fi puși în evidență prin experiența Bitter-Akulov. Pe suprafața unui feromagnetic se aplică o suspensie coloidală cu particule feromagnetice. Particulele sînt atrase spre regiunile cu cîmpuri mai intense, deci spre pereți, fiind puse în evidență aglomerări de particule cu ajutorul microscopului.

O proprietate caracteristică comună a substanțelor feromagnetice, aflate sub temperatura Curie, este relația dintre magnetizant M sau inducția magnetică B și cîmpul magnetizant H. Dacă se trasează variația $M = f(H)$ sau $B = f(H)$ se obține curba de histerezis. O asemenea curbă este reprezentată în figura 7.42 și se referă la un feromagnetic care a fost inițial demagnetizat, moment căruia îi corespunde punctul O — originea sistemului de axe $M - H$. Mărind intensitatea cîmpului magnetizant, se obține curba de primă magnetizare OA, punctul A corespunzînd saturației. Dacă H scade, se obțin punctele M_r și H_c. După atingerea saturației negative și urcînd din nou cîmpul manetizant H, curba de histerezis se închide. Magnetizarea M_r corespunzătoare cîmpului magnetizant egal cu zero se numește magnetizare remanentă,

iar cîmpul H_c corespunzător unei magnetizări nule se numește cîmp coercitiv.

Panta dM/dH din orice punct al curbei de histerezis determină susceptivitatea feromagnetică. În mod corespunzător, raportul dB/dH determinat din curba $B = f(H)$ reprezintă permeabilitatea magnetică instantanee. Panta curbei determinată în punctul inițial al curbei de primă magnetizare definește susceptivitatea sau permeabilitatea inițială.

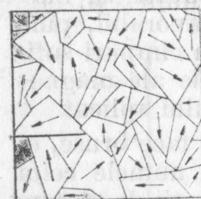


Fig. 7.41.

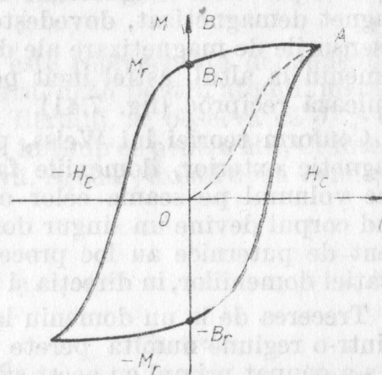


Fig. 7.42.

Energia consumată în procesul de magnetizare este proporțională cu aria delimitată de curba de histerezis,

$$W = \iint_S H\,dM = \frac{1}{\mu_0}\oint H\,dB.$$

Această energie se transformă ireversibil în căldură, datorită proceselor ireversibile care au loc în cursul magnetizării.

În funcție de forma curbei de magnetizare, materialele feromagnetice se clasifică în: a) feromagnetice moi cu ciclul de histerezis îngust, cîmpul coercitiv și inducția remanentă mici și permeabilitate inițială mare; b) feromagnetice dure, cu ciclul de histerezis lat, cîmpul coercitiv și inducția remanentă mare.

Fierul pur, aliajele Fe — Si, aliajele Fe — Ni de tipul permalloy sînt tipice feromagneticelor moi. Fierul fiind prea „moale" în sensul mecanic, se folosește în aliaje cu

Tabelul 7.3

Materialul	Compoziția (% de greutate, restul fiind fierul)	Permeabilitatea μ_r Inițială	Permeabilitatea μ_r Maximă	Cîmpul coercitiv, H_c (A/m)	Inducție de saturație, B_s (Wb/m²)	Temperatura Curie, T_c (°C)
Fier	0,05—0,2 (impurități)	200—5000	10^4—$2\cdot10^5$	4—80	2,2	770
Fier-siliciu	0,5 Si	280	3000	71,6	2,1	765
Fier-siliciu	3,25 Si	290	8000	55,7	2,0	740
Permalloy	45 Ni	3500	$5\cdot10^4$	5,6	1,6	440
Permalloy	78 Ni, 3—4 Mo	15000	10^5	4	1,1	580
Mumetal	5 Cu, 4 Mo, 77 Ni	$5\cdot10^4$	$17,5\cdot10^4$	1,1	0,7	355
Superpermalloy	5 Mo, 79 Ni	650	10^4	0,32	0,8	400

alte elemente, fapt ce conferă aliajului o anumită rigiditate mecanică și proprietăți magnetice noi. Un adaos de 4–5% siliciu crește rezistivitatea electrică de 5–6 ori față de fierul pur, conducînd la scăderea magnetizării de saturație. Aliajele Fe–Ni au permeabilitatea foarte mare, însă o magnetizare de saturație mică. Aliajele cu cea mai mare magnetizare sînt cele de Fe–Co, numite și permindur.

Cîmpul coercitiv al feromagneticilor moi este cuprins între cîteva miimi pînă la $1-2 \times 10^{-2}$ A/m. Acest cîmp mic face ca aceste materiale să fie folosite în cîmpuri variabile la confecționarea tolelor de transformator, a electromagneților etc., deoarece pierderile prin histerezis sînt proporționale cu aria cuprinsă sub curba de histerezis care, la rîndul ei, este proporțională cu cîmpul coercitiv. Înainte de a fi folosite, feromagneticile moi se supun unui tratament termic. De exemplu, aliajul compus din 78% Ni, 3–4% Mo și restul Fe — o altă varietate de permalloy, dacă este recopt la temperatura de 1100°C în vid sau în hidrogen și răcit cu viteză constantă, capătă proprietăți deosebite : H_c scade de zece ori, tocmai datorită tensiunilor interne din material, ce apar în timpul cristalizării. Cîteva proprietăți ale unor feromagnetice moi mai folosite sînt date în tabelul 7.3.

Materialele magnetice dure, avînd H_c mare, M_s și B_r mari, se folosesc la construcția magneților permanenți, deci ca surse de cîmp magnetic constant. Magneții din Fe–C sînt cunoscuți încă din secolul al XIII-lea. Mult mai recent au fost descoperite o varietate de aliaje cu proprietăți magnetice deosebite, care poartă nume comerciale, cum ar fi : alnico, triconal sau almax. Cîteva proprietăți mai deosebite ale unor aliaje folosite la producerea magneților permanenți sînt arătate în tabelul 7.4.

Antiferomagnetismul este o proprietate a unor substanțe cristaline, la care, în absența unui cîmp magnetic exterior, atomii vecini au momentele magnetice egale și orientate antiparalel, compensîndu-se unul pe altul, spre deosebire de feromagnetici, la care momentele magnetice sînt orientate paralel (fig. 7.43). Această proprietate o au o serie de metale și compuși cum sînt oxizii metalici : MnO, FeO, CoO sau MnS, $CoCl_2$ etc.

Din punct de vedere magnetic, structura acestor compuși poate fi privită ca formată din două subrețele magnetizate în sensuri opuse, a căror existență a fost pusă în

Tabelul 7.4

Materialul	Compoziția (în % de greutate, restul fiind fierul	Cîmpul coercitiv, H_c(A/m)	Inducția remanentă, B_r(Wb/m²)	$(BH)_{max}$ (J/m³)
1% oțel carbon	1 C, 0,5 Mn	$4,1 \cdot 10^3$	0,9	$1,59 \cdot 10^3$
5% tungsten-oțel	5 W, 0,7 C	$5,6 \cdot 10^3$	1,05	$2,63 \cdot 10^3$
Alnico V	8 Al, 14 Ni, 24 Co	$49,3 \cdot 10^3$	1,25	$4,2 \cdot 10^4$
Platină-cobalt	77 Pt, 23 Co	$34,2 \cdot 10^4$	6,45	$7,6 \cdot 10^4$

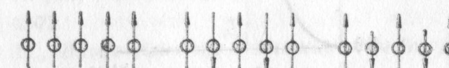


Fig. 7.43.

evidență prin difracție neutronică. Alinierea antiparalelă a momentelor magnetice la antiferomagnetici poate fi descrisă, de asemenea, printr-o ecuație de forma

$$W_s = -J\vec{s}_A \cdot \vec{s}_B,$$

în care pentru realizarea stabilității din punct de vedere termodinamic, adică a minimului energiei potențiale de interacțiune dintre doi atomi vecini A și B este necesar ca integrala de schimb să fie negativă.

La 0 K structura antiferomagneticului este ideală și momentele magnetice ale celor două subrețele se compensează reciproc, astfel că momentul total al antiferomagneticului este nul. Cu creșterea temperaturii, dispunerea antiparalelă a momentelor magnetice datorate spinilor electronilor se perturbă treptat, conducînd la o anumită magnetizare. Această structură antiferomagnetică poate exista pînă la o anumită temperatură caracteristică, numită temperatură Néel, cînd antiferomagneticul se transformă într-un paramagnetic. Crescînd în continuare temperatura, magnetizarea, respectiv susceptivitatea magnetică, scade la fel ca la paramagnetici (fig. 7.44).

Ferimagnetismul este o proprietate a unor substanțe compuse la care atomii celor două subrețele considerate, deși au spinii antiparaleli, aceștia nu se compensează

reciproc, deci momentele lor magnetice nu sînt egale, datorită numărului diferit sau a naturii atomilor din subrețelele respective (fig. 7.43). Aceasta conduce la apariția unui moment magnetic total și deci la o magnetizare spontană a cristalului, chiar în absența unui cîmp magnetic exterior.

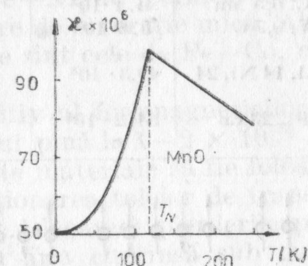


Fig. 7.44.

Deși substanțele ferimagnetice au unele proprietăți asemănătoare cu cele feromagnetice, din cauza structurii lor interne diferite, magnetizarea, respectiv susceptivitatea lor magnetică nu descrește monoton cu temperatura, putînd atinge valoarea zero înainte de atingerea temperaturii Néel.

Structura unui ferimagnetic poate fi considerată formată din două subrețele A și B de forma $(M_1O)(M_2O_3)$ în care M_1 și M_2 sînt metale bi- și trivalente, de exemplu, $MnOFe_2O_3$, $MgOAl_2O_3$ etc. Atunci cînd metalul trivalent este fierul, substanțele ferimagnetice respective se mai numesc și ferite. Feritele se obțin din oxidul de fier, cunoscut și sub numele de magnetit (Fe_3O_4), în care se înlocuiește unul din atomii de fier cu Mn, Zn, Ni etc.

Feritele au o serie de proprietăți deosebite față de alte substanțe: conductivitate electrică mică, curbă de histerezis de formă rectangulară etc. Întrucît în asemenea materiale nu se formează curenți turbionari, face ca ele să fie folosite în instalațiile de înaltă frecvență, de exemplu, ca miezuri pentru bobinele de inducție, transformatori în instalațiile radio și televiziune, automatică, elemente de memorie în mașinile electronice de calcul etc.

BIBLIOGRAFIE

1. Aczel O., *Analogii electro-mecanice*, ,,Revista Fiz.-Chim., A'', nr. 9 (1966).
2. Bădărău E., Grumăzescu M., *Bazele acusticii moderne*. Ed. Academiei R.P.R., București, 1961.
3. Bărbulescu N. ș.a., *Teoria cinetico-moleculară a gazelor*, Ed. Științifică, București, 1972.
4. Bărbulescu N., *Bazele fizice ale relativității restrînse*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1975.
5. D. Bărcă, Gălățeanu ș.a. *Fizica*, vol. 1 și 2, București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1971.
6. Born M., *Teoria relativității, a lui Einstein*, Ed. Științifică, București, 1969.
7. Bursuc D. I., *Suprafața Fermi*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1979.
8. Caius Iacob, *Introducere matematică în mecanica fluidelor*, Ed. Academiei R. P. R., 1952.
9. Chelu I., *Funcția metodică a modelului*, ,,Revista Fiz.-Chim., A'', nr. 11 (1968).
10. Constantinescu E., Csengeri E., *Folosirea modelării în învățarea fizicii și a biologiei*, ,,Revista de Psihologie'', nr. 2 (1974).
11. Coles B. R., Caplin A. D., *The Electronic Structures of Solids*, Ed. Arnold, London, 1976.
12. Craik D. I., *Structure and Properties of Magnetic Materials*, Pion Limited, London, 1971.
13. Dimboiu E., Sima P., *Cu privire la unele analogii mecanice și electrice*, ,,Revista Fiz.-Chim., A'', nr. 3 (1969).
14. Crangle I., *The Structures and Properties of Solids*, Ed. Arnold, London, 1977.
15. Dugdale S. I., *The Electrical Properties of Metals and Alloys*, Ed. Arnold, London, 1977.
16. Garnier J., *Introduction a l'étude de champs physique*, Ed. Dunod, Paris, 1941.
17. Halliday D., Resnick R., *Fizica*, vol. II, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1975.
18. Hesse M., *Models in Physics*, in ,,The British Journal for Phylosophy of Science'', vol. 6, Nr. 24, 1955.
19. Hutten E. H., *The Role of Models in Physics*, in ,,The British Journal for Phylosophy of Science'', vol. 4, nr. 16, 1954.

20. Ionescu G., *Analogii în fizică și posibilitatea modelării prin analogie. Cazul ecuațiilor de propagare*, „Revista Fiz.-Chim., A”, nr. 2 (1970).
21. Karplus J. W., *Analog Simulation*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. London, 1958.
22. Korchounov Y., *Fundaments matematiques de la cybernetique*, Ed. Mir,, Moscou, 1971.
23. Landau L., Lifchitz E., *Mecanique de fluides*, Ed. Mir, Moscou, 1971.
24. Levy A. R., *Principles of Solid State Physics*, Academic Press, London, 1960.
25. Licea I., *Fizica metalelor și aliajelor*, Tipografia Univ. Buc., 1980.
26. Littlefield A. T., Thorley N., *Atomic and Nuclear Physics*, Van Nostrand Reinhold, London, 1979.
27. Lovel, Avery and Vernon, *Physical Properties of Materials*, Van Nostrand Reinhold, London, 1979.
28. Luca E., *Elemente de fizică modernă*, Ed. Junimea, Iași, 1974.
29. Marinescu I., *Asupra teoriei modelării ca instrument de cercetare în fizică*, „Rev. Fiz. Chim. A”, nr. 6 (1973).
30. Matveev H. A., Molekulearnaia fizika, Vissaia școla, Moskva, 1981,
31. Moisil C. G., *Fizica pentru ingineri*, Ed. Tehnică, București, 1968.
32. * * * — *Models and analogues in biology*, Cambridge Univ. Press 1960.
33. Moțoc C., *Fizica solidului*, Editura Didactică și Pedagogică, 1968.
34. Murgulescu G. I., Segal E., *Introducere în chimia fizică*, vol. II, Ed. Academiei R.S.R., București, 1979.
35. Nemirovski E., *Sovremenie modeli atomnogo iadra*, Atomizdat, Moskva, 1960.
36. Nicolau Ed., *Analogie, modelare, simulare cibernetică*, Ed. Științifică, și Enciclopedică, București, 1977.
37. Pustovalov E. G., *Atomnaia i iadernaia fiziko*, Izd. Moskv. Univ. 1969.
38. Razumihiri A., *Modèles physiques et méthodes*. Edition Mir, Moskou, 1975.
39. R. Saint-Guilhem, *Les principes généraux de la similitude physique*, Edition Eyrolles, Paris, 1971.
40. Shannon R., *Sistem simulation*, Prentico-Hall, Inc., New Jersey, 1975.
41. Smith R. A., *Semiconductor*, ed. II. Cambridge University Press, 1978.
42. Tilley E. D., *University Physics*, Cuminings Publishing Comp., London, 1976.
43. Tomescu M. O., *Modelarea în predarea fizicii*, autoreferat, București, 1978.
44. Tudose C., *Fizica atomică și nucleară*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1970.
45. Tudose C., *Mecanică fizică, acustică și căldură*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1976.
46. Tudose C., Cucurezeanu I., Velican N. ș.a., *Fizica*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981.
47. Wenham ș.a., *Physics Concepts and Models*, Addison-Wesley PbLt, London, 1972.
48. Wright H. C., *Elementary Semiconductor Physics*, Van Nostrand Reinhold, London, 1979.